

## Berechenbarkeit und Komplexität WS 2008/09 – Fragenkatalog zum Thema Berechenbarkeit –

Die Klausur und die Präsenzübungen bestehen zu einem großen Teil aus Wissens- und einfachen Verständnisfragen. Der nachfolgende Fragenkatalog soll dazu dienen, das eigene Wissen zu kontrollieren und ein Gefühl für mögliche Aufgabenstellen zu bekommen.

Einige dieser Fragen werden sich sicherlich auch in den Klausuren wiederfinden.

- a) Sei  $\Sigma = \{0, 1\}$ . Wofür steht  $\Sigma^k, \Sigma^0, \Sigma^*$ ? Was ist eine *Sprache* über dem Alphabet  $\Sigma$ ?
- b) Definieren Sie das Modell der Turingmaschine.
- c) Was ist die Konfiguration einer TM? Was ist eine Nachfolgekonfiguration?
- d) Beschreiben Sie formal eine TM, die die Sprache  $\{0^i 1^j \mid i, j \geq 0\}$  erkennt. Geben Sie insbesondere die Übergangsfunktion an.
- e) Was ist der Unterschied zwischen einer Mehrspur- und einer Mehrband-TM?
- f) Beschreiben Sie die Simulation einer  $k$ -Band TM durch eine 1-Band TM und geben Sie die Laufzeit der Simulation an.
- g) Beschreiben Sie die Simulation der RAM durch eine  $k$ -Band-TM und geben Sie die Laufzeit der Simulation an.
- h) Beschreiben Sie die Simulation einer 1-Band TM durch eine RAM und geben Sie die Laufzeit der Simulation an.
- i) Was ist eine Gödelnummerierung?
- j) Was versteht man unter der Universellen Turingmaschine?
- k) Definieren Sie das Modell der RAM.
- l) Was ist der Unterschied zwischen dem uniformen und dem logarithmischen Kostenmaß der RAM?
- m) Definieren Sie die Syntax und Semantik von LOOP- und WHILE-Programmen. Welche dieser Programmiersprachen ist *Turing-mächtig*, welche nicht?
- n) Definieren Sie die folgenden Entscheidungsprobleme in Form einer Sprache.

(a) Diagonalsprache

$$D = \{ \dots \mid \dots \}$$

(b) Halteproblem

$$H = \{ \dots \mid \dots \}$$

(c) Spezielles Halteproblem

$$H_\varepsilon = \{ \dots \mid \dots \}$$

- o) Wann ist eine Sprache *rekursiv (entscheidbar)*?
- p) Wann ist eine Sprache *rekursiv aufzählbar (semi-entscheidbar)*?
- q) Wann *erkennt* und wann *entscheidet* eine TM eine Sprache?
- r) Wie lautet die Definition für die *Reduktion* ( $L_1 \leq L_2$ )?
- s) Was unterscheidet die Reduktion von der Unterprogrammtechnik?
- t) Wiederholen Sie die Übungsaufgaben zur
  - (a) Diagonalisierung,
  - (b) Unterprogrammtechnik,
  - (c) Reduktion.

Hinweis: Gliedern Sie Ihre Beweise analog zu den in der Vorlesung vorgestellten Beweisen.

- u) Was besagt der Satz von Rice?
- v) Gegeben sei eine TM  $M$ , die  $L$  erkennt und eine TM  $\bar{M}$ , die  $\bar{L}$  erkennt. Ist dann  $L$  entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort.
- w) Sind rekursiv aufzählbare Sprachen abgeschlossen gegen
  - (a) Schnitt,
  - (b) Vereinigung,
  - (c) Komplement?

Begründen Sie Ihre Antworten.

- x) Nennen Sie jeweils ein Beispiel für eine nicht-rekursive Sprache  $L$ , so dass gilt
  - (a)  $L$  rekursiv aufzählbar und  $\bar{L}$  nicht rekursiv aufzählbar,
  - (b)  $L$  nicht rekursiv aufzählbar und  $\bar{L}$  rekursiv aufzählbar,
  - (a)  $L$  und  $\bar{L}$  nicht rekursiv aufzählbar.
- y) Definieren Sie das Post'sche Korrespondenzproblem und das zehnte Hilbertsche Problem.

## Berechenbarkeit und Komplexität WS 2008/09 – Fragenkatalog zum Thema Komplexität –

Die Klausur und die Präsenzübung bestehen zu einem großen Teil aus Wissens- und einfachen Verständnisfragen. Der nachfolgende Aufgabenkatalog soll dazu dienen, das eigene Wissen zu kontrollieren und ein Gefühl für mögliche Aufgabenstellen zu bekommen.

Einige dieser Fragen werden sich sicherlich auch in den Klausuren wiederfinden.

- a) Wie ist die worst-case Laufzeit eines Algorithmus definiert?
- b) Definieren Sie die Komplexitätsklasse  $P$ .
- c) Was ist eine nicht-deterministische Turingmaschine (NTM)? Wie ist ihr Akzeptanzverhalten und ihre Laufzeit definiert?
- d) Definieren Sie die Komplexitätsklasse  $NP$  mit Hilfe von NTMs einerseits und Polynomialzeitverifizierern andererseits. Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden Definitionen.
- e) Geben Sie die Optimierungs- und Entscheidungsvarianten der folgenden Probleme an: Clique, KP, BPP, TSP.
- f) Zeigen Sie für die obigen Probleme, dass sich aus polynomiellen Algorithmen für die Entscheidungsvarianten polynomielle Algorithmen für die Optimierungsvarianten folgern lassen, und umgekehrt.
- g) Geben Sie die Simulation einer NTM mit polynomieller worst-case Laufzeit durch eine TM an. Wie hoch ist die Laufzeit der resultierenden TM?
- h) Nennen Sie den Unterschied zwischen  $\leq$  und  $\leq_p$ .
- i) Wann heißt ein Problem  $NP$ -hart bzw.  $NP$ -vollständig?
- j) Beschreiben Sie kurz die Aussage und die Beweisidee des Satzes von Cook und Levin. (Wiederholen Sie sorgfältig den Beweis.)
- k) Wiederholen Sie sämtliche polynomielle Reduktionen aus der Vorlesung und den Übungen.
- l) Erläutern Sie das Verhältnis der Komplexitätsklassen  $P$ ,  $NP$  und  $NPC$  zueinander unter der Annahme  $NP \neq P$ . ( $NPC$  bezeichnet die Klasse der  $NP$ -vollständigen Probleme.)