Lehrstuhl für Informatik 1
Prof. Dr. Berthold Vöcking
Alexander Skopalik
Matthias Englert

WS 2007/08
18.2.2008

Klausur

Berechenbarkeit und Komplexität

Name: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Studiengang: ....

Hinweise:

- Bitte versehen Sie jedes Blatt mit Namen und Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie deutlich. Unleserliches wird nicht korrigiert und als fehlerhaft gewertet.
- Streichen Sie Konzeptrechnungen, die nicht gewertet werden sollen, durch, oder machen Sie sie anderweitig kenntlich. Bei mehreren Lösungsversuchen pro Aufgabe wird der schlechteste gewertet.
- Bitte verwenden Sie einen dokumentenechten Stift mit blauer oder schwarzer Tinte, und verwenden Sie keinen Tintenkiller oder ähnliches. Benutzen Sie ausschließlich das zur Verfügung gestellte Papier.
- Halten Sie bitte Ihren Studierendenausweis und einen Lichtbildausweis zur Kontrolle bereit.
- Bitte schalten Sie Ihre Mobiltelefone aus.
- Die Klausur besteht aus acht Aufgaben mit Unteraufgaben. Zwischen den Aufgaben ist jeweils so viel Platz zur Verfügung gestellt, wie für die Bearbeitung der Aufgabe notwendig ist. Gegebenenfalls können Sie auch noch die Rückseiten der Blätter verwenden oder zusätzliches Papier erfragen.
- Die Bearbeitungszeit beträgt zwei Stunden.

Ich versichere, die Klausur selbstständig bearbeitet zu haben, und dass mir bekannt ist, dass die Klausur bei einem Täuschungsversuch mit "nicht bestanden" bewertet wird.

....
(Unterschrift)

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Gesamt	Note
Punkte	15	15	15	15	15	15	15	15	120	
erreicht										

(Name / Matrikelnummer)

Aufgabe 1.:

(a) Benennen Sie die übrigen 6 Komponenten einer deterministischen Turingmaschine (TM): **(3 Punkte)**

- Q, die endliche Zustandsmenge
-
-
-
-
-
-

(b) Wie ist die Zustandsübergangsfunktion δ einer **k-Band-**Turingmaschine definiert? Beschreiben Sie insbesondere Definitions- und Bildbereich. **(2 Punkte)**

(c) Was besagt die Church-Turing-These? **(2 Punkte)**

(d) Definieren Sie, wann eine Sprache entscheidbar ist. **(1 Punkt)**

(e) Definieren Sie, wann eine Sprache semi-entscheidbar ist. **(1 Punkt)**

(f) Was ist die Mächtigkeit (Kardinalität) der

(1) Menge aller Sprachen über dem Alphabet Σ? **(1 Punkt)**

(2) Menge aller Turingmaschinen? **(1 Punkt)**

Was folgt daraus über die Existenz nicht-rekursiver Probleme? **(1 Punkt)**

(g) Definieren Sie das Post'sche Korrespondenzproblem. **(3 Punkte)**

(Name / Matrikelnummer)

Aufgabe 2.:

(a) Nennen Sie eine berechenbare Funktion, die nicht durch ein LOOP-Programm berechnet werden kann.

(1 Punkt)

(b) Ist das Entscheidungsproblem, ob ein gegebenes LOOP-Programm bei Eingabe x die Ausgabe y berechnet, rekursiv? Begründen Sie ihre Antwort. **(2 Punkte)**

(c) Beschreiben Sie die übrigen zwei syntaktischen Regeln zur Bildung von WHILE-Programmen.

(2 Punkte)

- Für jedes $c \in \{-1, 0, 1\}$ ist die Zuweisung $x_i := x_j + c$ ein WHILE Programm.
-
-

(d) Sind WHILE-Programme immer noch Turing-mächtig, wenn die Zuweisungen $x_i := x_j + c$ nur noch für $c \in \{-1, 0\}$ erlaubt sind. Begründen Sie Ihre Antwort. **(4 Punkte)**

(e) Geben Sie ein WHILE-Programm an, welches $\lceil \frac{x_0}{2} \rceil + x_1 + x_2$ berechnet. Skizzieren Sie dazu zunächst kurz Ihre Idee und schreiben Sie das Programm anschließend formal korrekt auf. Vergessen Sie dabei nicht, den selbstgeschriebenen Code entsprechend zu kommentieren.

(6 Punkte)

Aufgabe 3.:

(a) Nennen Sie jeweils ein Beispiel für eine Sprache, die

(1) rekursiv ist. **(1 Punkt)**

(2) rekursiv aufzählbar aber nicht rekursiv ist. **(1 Punkt)**

(3) nicht rekursiv aufzählbar ist. **(1 Punkt)**

(b) Was folgt für L und $\bar{L}$ aus der Aussage "L und $\bar{L}$ sind rekursiv aufzählbar"? **(1 Punkt)**

(c) Seien L_1 und L_2 zwei Sprachen. Außerdem sei $L = L_1 \uparrow L_2$ das NAND dieser beiden Sprachen, d.h. $w \in L$ genau dann, wenn nicht gleichzeitig $w \in L_1$ und $w \in L_2$.

(1) Zeigen Sie, dass die Menge der rekursiven Sprachen unter der Operation $\uparrow$ abgeschlossen ist (d.h. falls L_1 und L_2 rekursiv sind, dann auch L). **(3 Punkte)**

(2) Zeigen Sie, dass die Menge der rekursiv aufzählbaren Sprachen unter der Operation $\uparrow$ nicht abgeschlossen ist (d.h. aus L_1 und L_2 rekursiv aufzählbar folgt im Allgemeinen nicht, dass auch L rekursiv aufzählbar ist). **(3 Punkte)**

(d) Zeigen Sie durch Unterprogrammtechnik, dass die Sprache

$$G = \{\langle M\rangle | M \text{ hält auf der leeren Eingabe nach einer geraden Anzahl von Schritten}\}$$

nicht rekursiv ist. **(5 Punkte)**

(Name / Matrikelnummer)

Aufgabe 4.:

(a) Gegeben seien die beiden Sprachen

$$H_{\text{all}} = \{\langle M\rangle \mid M \text{ hält auf allen Eingaben}\}$$

und

$$A_{\text{EQ}} = \{\langle M_1\rangle\langle M_2\rangle \mid L(M_1) = L(M_2)\}\ .$$

$L(M_i)$ bezeichet hier die von M_i erkannte Sprache. Zeigen Sie $H_{\text{all}} \leq A_{\text{EQ}}$. **(15 Punkte)**

Aufgabe 5.:

(a) Definieren Sie die Klasse NP. **(1 Punkt)**

(b) Definieren Sie die Klasse PSPACE. **(1 Punkt)**

(c) Definieren Sie, wann ein Entscheidungsproblem A NP-vollständig ist. **(1 Punkt)**

(d) Was versteht man unter pseudopolynomieller Laufzeit? **(2 Punkte)**

(e) Definieren Sie, wann ein Problem *schwach* NP-hart ist. **(1,5 Punkte)**

(f) Definieren Sie, wann ein Problem *stark* NP-hart ist. **(1,5 Punkte)**

(g) Nennen Sie ein Beispiel eines schwach NP-harten Problems. **(1 Punkt)**

(h) Beschreiben Sie den Unterschied zwischen einem PTAS und einem FPTAS. **(2 Punkte)**

(i) Unter der Annahme, dass $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$, welche der folgenden Probleme sind in P (Bitte ankreuzen)? **(2 Punkte)**

- ☐ Kürzester Weg
- ☐ Längster Weg
- ☐ Hamiltonkreis
- ☐ Graphzusammenhang
- ☐ Eulerkreis

(j) Stellen Sie unter der Annahme $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$ durch ein Mengendiagramm die Beziehungen zwischen den Klassen P, NP und NPC dar (NPC bezeichnet die Klasse der NP-vollständigen Probleme). **(2 Punkte)**

(Name / Matrikelnummer)

Aufgabe 6.:

(a) Definieren Sie das Problem SubSetSum. **(1 Punkt)**

Eingabe:

Frage:

(b) Definieren Sie die Entscheidungsvariante des Rucksackproblems KP-E. **(1 Punkt)**

Eingabe:

Frage:

(c) Beschreiben Sie eine polynomielle Reduktion SubSetSum $\leq_p$ KP-E. **(5 Punkte)**

(d) Nehmen Sie an, die Entscheidungsvariante des Rucksackproblems (KP-E) sei in P. Zeigen Sie, dass dann auch die Optimierungsvariante des Rucksackproblems in P ist. **(8 Punkte)**

(Name / Matrikelnummer)

Aufgabe 7.:

(a) Definieren Sie das Problem 3Sat. **(2 Punkte)**

Eingabe:

Frage:

(b) Definieren Sie das Problem Clique. **(2 Punkte)**

Eingabe:

Frage:

Beschreiben Sie eine polynomielle Reduktion 3Sat $\leq_p$ Clique. **(8 Punkte)**

(c) Wenden Sie Ihre Reduktion auf die Formel $\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3)$ an. Zeichnen Sie den resultierenden Graphen. **(3 Punkte)**

(Name / Matrikelnummer)

Aufgabe 8.:

(a) Definieren Sie das Entscheidungsproblem SATISFIABILITY (SAT). **(1 Punkt)**

Eingabe:

Frage:

(b) Geben Sie die Aussage des Satzes von Cook und Levin an. **(1 Punkt)**

(c) Geben Sie die im Beweis des Satzes von Cook und Levin verwendeten Variablentypen an und beschreiben Sie deren Bedeutung. **(3 Punkte)**

(d) Beschreiben Sie durch eine KNF-Formel den Umstand, dass sich die NTM zu jedem Zeitpunkt nur in genau einem Zustand befinden kann. **(5 Punkte)**

(e) Geben Sie eine aussagenlogische Formel (nicht notwendigerweise in KNF) zur Beschreibung des folgenden Umstands an.

> Zum Zeitpunkt t ist die Bandinschrift an allen Positionen außer der Kopfposition (zum Zeitpunkt $t-1$) identisch mit der Inschrift zum Zeitpunkt $t-1$.

(5 Punkte)