Berechenbarkeit und Komplexität

NP-Vollständigkeit von 3SAT und einiger Graphprobleme

Prof. Berthold Vöcking
präsentiert von Prof. Joost-Pieter Katoen

16. Januar 2009

Definition von 3SAT

Problem (3SAT)

Eingabe: Aussagenlogische Formel ϕ in 3KNF
Frage: Gibt es eine erfüllende Belegung für ϕ?

- 3SAT ist ein Spezialfall von SAT und deshalb wie SAT in NP.
- Um zu zeigen, dass 3SAT ebenfalls NP-vollständig ist, müssen wir also nur noch die NP-Härte von 3SAT nachweisen.
- Dazu zeigen wir $\boxed{\text{SAT} \leq_p \text{3SAT.}}$
- Dann gilt: SAT ist NP-Hart und SAT $\leq_p$ 3SAT, also 3SAT ist NP-Hart

SAT $\leq_p$ 3SAT

Lemma

SAT $\leq_p$ 3SAT.

Beweis:

- Gegeben sei eine Formel ϕ in KNF.
- Wir transformieren ϕ in eine *erfüllbarkeitsäquivalente* Formel ϕ' in 3KNF, d.h.

$$\phi \text{ ist erfüllbar } \Leftrightarrow \phi' \text{ ist erfüllbar }.$$

SAT $\leq_p$ 3SAT

- Eine k-Klausel sei eine Klausel mit k Literalen.
- Aus einer 1- bzw 2-Klausel können wir leicht eine äquivalente 3-Klausel machen, indem wir ein Literal wiederholen.
- Was machen wir mit k-Klauseln für $k > 3$?

SAT $\leq_p$ 3SAT

- Sei C beispielsweise eine 4-Klausel der Form

$$C \;=\; \ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3 \vee \ell_4 \;\; .$$

- In einer *Klauseltransformation* ersetzen wir C durch die Teilformel

$$C' \;=\; (\ell_1 \vee \ell_2 \vee h) \wedge (\bar{h} \vee \ell_3 \vee \ell_4) \;\; ,$$

wobei h eine zusätzlich eingeführte Hilfvariable bezeichnet.

Nachweis der Erfüllbarkeitsäquivalenz:

ϕ' sei aus ϕ entstanden durch Ersetzen von C durch C'.

zz: ϕ erfüllbar $\Rightarrow$ ϕ' erfüllbar

- Sei B eine erfüllende Belegung für ϕ.
- B weist mindestens einem Literal aus C den Wert 1 zu.
- Wir unterscheiden zwei Fälle:
  1) Falls ℓ_1 oder ℓ_2 den Wert 1 haben, so ist ϕ' für $h = 0$ erfüllt.
  2) Falls ℓ_3 oder ℓ_4 den Wert 1 haben, so ist ϕ' für $h = 1$ erfüllt.

  Also ist ϕ' in beiden Fällen erfüllbar.

Nachweis der Erfüllbarkeitsäquivalenz

zz: ϕ' erfüllbar $\Rightarrow$ ϕ erfüllbar

- Sei B nun eine erfüllende Belegung für ϕ'.
- Wir unterscheiden zwei Fälle:
  - Falls B der Variable h den Wert 0 zuweist, so muss B einem der beiden Literale ℓ_1 oder ℓ_2 den Wert 1 zugewiesen haben.
  - Falls B der Variable h den Wert 1 zuweist, so muss B einem der beiden Literale ℓ_3 oder ℓ_4 den Wert 1 zugewiesen haben.

In beiden Fällen erfüllt B somit auch ϕ.

SAT $\leq_p$ 3SAT

Wir verallgemeinern die Klauseltransformation für $k \geq 4$:

- Jede Klausel der Form

  $$\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ldots \vee \ell_{k-1} \vee \ell_k$$

  wird durch eine Formel der Form

  $$(\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ldots \vee \ell_{k-2} \vee h) \wedge (\bar{h} \vee \ell_{k-1} \vee \ell_k)$$

  ersetzt.
- Die Erfüllbarkeitsäquivalenz folgt analog zum Fall $k = 4$.

SAT $\leq_p$ 3SAT

- Eine Klausel der Länge $k > 3$ erzeugt somit eine Klausel der Länge $k - 1$ und eine Klausel der Länge 3.
- Dieses Prinzip wenden wir solange auf alle Klauseln der Länge größer 3 an (wobei jedesmal eine zusätzliche Hilfvariable erzeugt wird) bis nur noch Klauseln der Länge 3 übrig sind.

Beispiel für die Klauseltransformation:
Aus der 5 Klausel

$$x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_5$$

wird in einem ersten Transformationsschritt die Teilformel

$$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee h_1) \;\wedge\; (\bar{h}_1 \vee x_4 \vee \bar{x}_5) \;,$$

also eine 4- und eine 3-Klausel. Auf die 4-Klausel wird die Transformation erneut angewandt. Wir erhalten die Teilformel

$$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee h_2) \;\wedge\; (\bar{h}_2 \vee x_3 \vee h_1) \;\wedge\; (\bar{h}_1 \vee x_4 \vee \bar{x}_5) \;,$$

die nur noch 3 Klauseln erhält.

SAT $\leq_p$ 3SAT

- Eine Klausel der Länge $k > 3$ erzeugt somit eine Klausel der Länge $k - 1$ und eine Klausel der Länge 3.
- Dieses Prinzip wenden wir solange auf alle Klauseln der Länge größer 3 an (wobei jedesmal eine zusätzliche Hilfvariable erzeugt wird) bis nur noch Klauseln der Länge 3 übrig sind.
- Die Gesamtlaufzeit dieser Transformation ist polynomiell beschränkt, da die maximale Klausellänge pro Iteration um eins sinkt.

$\square$

NP-Vollständigkeit von 3SAT

Aus 3SAT $\in$ NP und, SAT ist NP-hart, und SAT $\leq_p$ 3SAT folgt

Korollar

3SAT ist NP*-vollständig.*

Übrigens 2SAT $\in$ P.

NP-Vollständigkeit von CLIQUE

Wie erinnern uns an das Cliquenproblem.

Problem (CLIQUE)

Eingabe: *Graph* $G = (V, E)$, $k \in \{1, \ldots, |V|\}$
Frage: *Hat* G *eine* k*-Clique?*

Satz

CLIQUE ist NP*-vollständig.*

Beweis der NP-Vollständigkeit von CLIQUE

Da wir schon wissen, dass CLIQUE $\in$ NP, müssen wir zum Nachweis der NP-Vollständigkeit nur noch die NP-Härte nachweisen.

Dazu zeigen wir $\boxed{\text{3SAT} \leq_p \text{CLIQUE.}}$

Wir beschreiben eine polynomiell berechenbare Funktion f, die eine 3KNF-Formel ϕ in einen Graphen $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ transformiert, so dass gilt:

$$\phi \text{ ist erfüllbar} \;\Leftrightarrow\; G \text{ hat eine } k\text{-Clique} \;.$$

Beschreibung der Funktion f:

- Seien $C_1, \ldots, C_m$ die Klauseln von ϕ.
- Seien $\ell_{i,1}, \ell_{i,2}, \ell_{i,3}$ die Literale in Klausel C_i.
- Identifiziere Literale und Knoten, d.h. setze

$$V \;=\; \{\ell_{i,j} \mid 1 \le i \le m, 1 \le j \le 3\} \ .$$

- Jedes Knotenpaar wird durch eine Kante verbunden, außer
  1) die assoziierten Literale gehören zur selben Klausel oder
  2) eines der beiden Literale ist die Negierung des anderen Literals.
- Setze $k = m$.

Beweis der NP-Vollständigkeit von CLIQUE

Beispiel: $\phi \;=\; (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_4)$

Erfüllende Belegung:

Korrektheit der Transformation:

zz: ϕ erfüllbar $\Rightarrow$ G hat eine m-Clique

Jede erfüllende Belegung erfüllt in jeder Klausel mindestens ein Literal. Pro Klausel wähle eines dieser erfüllten Literale beliebig aus. Wir behaupten, die m ausgewählten Literale bilden eine m-Clique in G.

Begründung:

- Alle selektierten Literale gehören zu verschiedenen Klauseln. Es kann also keine Kante aufgrund von Regel 1) fehlen.
- Alle selektierten Literale werden gleichzeitig erfüllt, widersprechen sich also nicht. Es kann somit auch keine Kante wegen Regel 2) fehlen.

Beweis der NP-Vollständigkeit von CLIQUE

zz: G hat m-Clique $\Rightarrow \phi$ erfüllbar

- Wenn G eine k-Clique hat, so müssen, aufgrund von Regel 1), die Knoten in dieser Clique zu verschiedenen Klauseln gehören.
- Aus $k = m$ folgt somit, dass die k-Clique genau ein Literal pro Klausel selektiert.
- Diese Literale können alle gleichzeitig erfüllt werden, da sie sich wegen Regel 2) nicht widersprechen.
- Also ist ϕ erfüllbar.

Die polynomielle Laufzeit von f ist offensichtlich. $\square$

Hamiltonkreisprobleme

Problem (Hamiltonkreis – Hamiltonian Circuit – HC)

Eingabe: Graph $G = (V, E)$

Frage: Gibt es einen Hamiltonkreis in G?

Problem (Gerichteter Hamiltonkreis – Directed HC – DHC)

Eingabe: gerichteter Graph $G = (V, E)$

Frage: Gibt es einen Hamiltonkreis in G?

HC $\leq_p$ DHC

Lemma

HC $\leq_p$ *DHC.*

Beweis:

Reduktion: Für HC liege ein ungerichteter Graph G vor. Wir transformieren G in einen gerichteten Graphen G', indem wir jede ungerichtete Kante durch zwei entgegengesetzte gerichtete Kanten ersetzen. Diese lokale Ersetzung ist offensichtlich in polynomieller Zeit möglich.

Korrektheit: G hat genau dann einen Hamiltonkreis, wenn auch G' einen Hamiltonkreis hat. $\square$

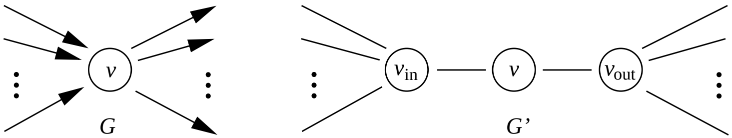
DHC $\leq_p$ HC

Lemma

DHC $\leq_p$ HC.

Beweis:

Reduktion: Gegeben sei nun ein gerichteter Graph $G = (V, E)$. Aus G konstruieren wir wieder mittels lokaler Ersetzung einen ungerichteten Graphen G':



Interpretation: v ist Zimmer, v_{in} und v_{out} sind Ein- bzw. Ausgangstüren.

DHC $\leq_p$ HC – Fortsetzung Beweis

Korrektheit:
Wir müssen zeigen, G hat genau dann einen Hamiltonkreis, wenn auch G' einen Hamiltonkreis hat.

Jede Rundreise in G kann offensichtlich in eine Rundreise in G' transformiert werden.

Aber wie sieht es mit der Umkehrrichtung aus?

- Eine Rundreise in G', die ein Zimmer durch die Eingangstür betritt, betritt alle Zimmer durch die Eingangstür.
- Eine Rundreise in G', die ein Zimmer durch die Ausgangstür betritt, betritt alle Zimmer durch die Ausgangstür. Aber diese Rundreise können wir rückwärts ablaufen.

Also kann auch jeder Hamiltonkreis in G' in einen Hamiltonkreis in G transformiert werden. □

NP-Vollständigkeit von HC und DHC

Satz

HC und DHC sind NP*-vollständig.*

Beweis:

Beide Probleme sind offensichtlich in NP, da man die Kodierung eines Hamiltonkreises in polynomieller Zeit auf ihre Korrektheit überprüfen kann.

Da HC und DHC beidseitig aufeinander polynomiell reduzierbar sind, genügt es die NP-Härte eines der beiden Probleme nachzuweisen.

Wir zeigen: $\boxed{\text{SAT} \leq_p \text{DHC.}}$

Reduktion:

Wir präsentieren eine polynomiell berechenbare Funktion f die eine KNF-Formel ϕ mit Variablen

$$x_1, \ldots, x_N$$

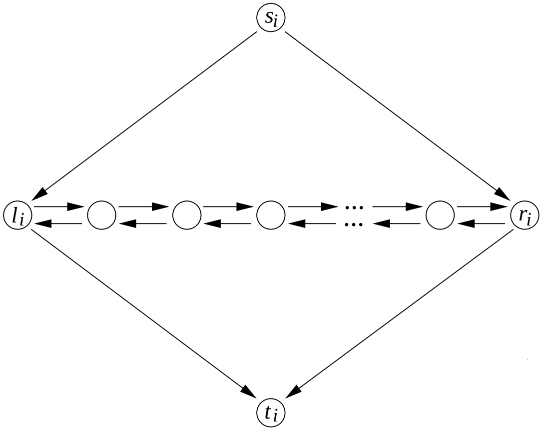
und Klauseln

$$c_1, \ldots, c_M$$

in einen gerichteten Graphen $G = (V, E)$ transformiert, sodaß:

$$\phi \text{ ist erfüllbar } \Leftrightarrow \; G \text{ hat einen Hamiltonkreis } .$$

Für jede Variable x_i enthalte der Graph G die folgende Struktur G_i.



Diese Struktur heißt *Diamantengadget*.

NP-Vollständigkeit von HC und DHC – Fortsetzung Beweis

Diese N Gadgets werden miteinander verbunden, indem wir die Knoten t_i und s_{i+1} $(1 \leq i \leq N - 1)$ sowie t_N und s_1 miteinander identifizieren. (Bild Tafel)

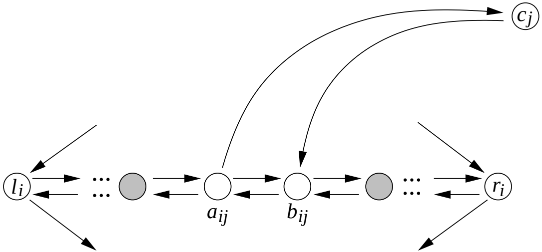
In dem so entstehenden Graphen besucht jede Rundreise, die beim Knoten s_1 startet, die Gadgets in der Reihenfolge $G_1, G_2, \ldots, G_N$.

Die Rundreise hat dabei für jedes Gadget G_i die Freiheit das Gadget *von links nach rechts*, also von l_i nach r_i, oder *von rechts nach links*, also von r_i nach l_i, zu durchlaufen.

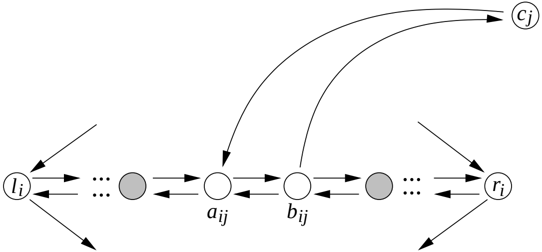
Die erste Variante interpretieren wir als Variablenbelegung $x_i = 1$, die zweite als Variablenbelegung $x_i = 0$.

Jetzt fügen wir einen weiteren Knoten für jede Klausel c_j ein.

Falls das Literal x_i in Klausel c_j enthalten ist, so verbinden wir das Gadget G_i wie folgt mit dem Klauselknoten c_j:



Falls das Literal $\bar{x}_i$ in Klausel c_j enthalten ist, so verbinden wir das Gadget G_i wie folgt mit dem Klauselknoten c_j:



Ist es nach Hinzunahme der Klauselknoten möglich, dass eine Rundreise zwischen den Gadgets hin- und herspringt statt sie in der vorgesehenen Reihenfolge zu besuchen? - Nein, weil ...

Korrektheit:

zu zeigen: G hat einen Hamiltonkreis $\Rightarrow \phi$ ist erfüllbar

- Wird ein Klauselknoten c_j aus einem Gadget G_i heraus von links nach rechts durchlaufen, so muss gemäß unserer Konstruktion, die Klausel c_j das Literal x_i enthalten.
- Also wird diese Klausel durch die mit der Laufrichtung von links nach rechts assoziierten Belegung $x_i = 1$ erfüllt.
- Bei einer Laufrichtung von rechts nach links, die mit der Belegung $x_i = 0$ assoziiert ist, wird die Klausel ebenso erfüllt, weil sie in diesem Fall das Literal $\bar{x}_i$ enthält.

Also erfüllt die mit der Rundreise assoziierte Belegung alle Klauseln.

zu zeigen: ϕ ist erfüllbar $\Rightarrow$ G hat einen Hamiltonkreis

- Eine Belegung beschreibt in welcher Richtung die Gadgets $G_1, \ldots, G_N$ jeweils durchlaufen werden.
- Klauselknoten c_j können wir in die Rundreise einbauen, indem wir eine der Variablen x_i auswählen, die c_j erfüllt, und c_j vom Gadget G_i aus besuchen.
- Sollte c_j für $x_i = 1$ erfüllt sein, so ist x_i unnegiert in c_j enthalten, und somit ist ein Besuch von c_j beim Durchlaufen des Gadgets G_i von links nach rechts möglich.
- Sollte c_j hingegen für $x_i = 0$ erfüllt sein, so ist x_i negiert in der Klausel enthalten, und der Besuch von c_j kann beim Durchlaufen des Gadgets G_i von rechts nach links erfolgen.

Also können alle Klauselknoten in die Rundreise eingebunden werden. $\square$

NP-Vollständigkeit von TSP

$\{1, 2\}$-TSP ist eine eingeschränkte Variante des TSP-Problems, bei der wir nur die Gewichtswerte 1 und 2 erlauben.

Korollar

Die Entscheidungsvariante von $\{1, 2\}$-TSP ist NP*-hart.*

Beweis: Zeige HC $\leq_p$ $\{1, 2\}$-TSP. Wie? ...