# Berechenbarkeit und Komplexität

## Lecture #6: Das Spezielle Halteproblem u. Satz von Rice

Prof. Berthold Vöcking
präsentiert durch Prof. Joost-Pieter Katoen

7. November 2008

# Kurzfassung Halteproblem

Beim *Halteproblem* geht es darum, zu entscheiden, ob ein Programm auf einer bestimmten Eingabe $w$ terminiert.

Das Halteproblem wird als folgende formale Sprache dargestellt:

$$H = \{\langle M \rangle w \mid M \text{ hält auf } w\} \ .$$

Wir haben festgestellt, dass dieses elementare Problem nicht entscheidbar ist.

# Unterprogrammtechnik

Die Unterprogrammtechnik lässt sich wie folgt zusammenfassen:

**Unterprogrammtechnik zum Nachweis von Unentscheidbarkeit**

Um nachzuweisen, dass eine Sprache $L$ nicht rekursiv ist, genügt es zu zeigen, dass man durch Unterprogrammaufruf einer TM $M_L$, die $L$ entscheidet, ein anderes Problem $L'$ entscheiden kann, dass bereits als nicht rekursiv bekannt ist.

Im Folgenden werden wir die Unterprogrammtechnik anwenden auf ein spezielles Halteproblem.

Betrachte die sogenannte *Diagonalsprache*:

$$D \;=\; \{\, w \in \{0,1\}^* \mid w = w_i \text{ und } M_i \text{ akzeptiert } w \text{ nicht}\} \;\; .$$

Cantor's Diagonalisierungstechnik hat gezeigt:

**Satz:**

Die Diagonalsprache $D$ ist nicht rekursiv.

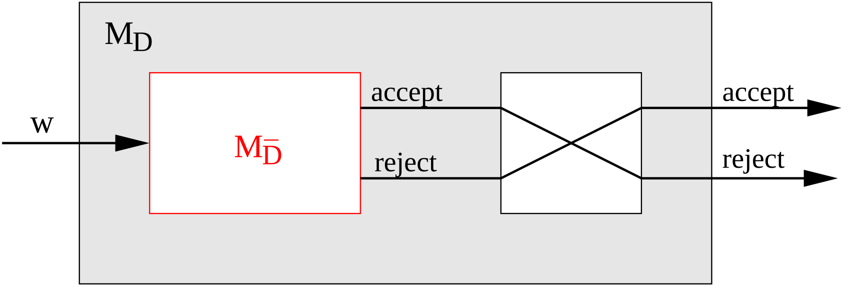
Mit Hilfe der Unterprogrammtechnik können wir dann beweisen:

**Satz:**

Das Komplement $\bar{D}$ der Diagonalsprache ist nicht rekursiv.

# Unentscheidbarkeit des Komplement der Diagonalsprache

*Illustration:* Aus $M_{\bar{D}}$ konstruieren wir $M_D$.




Aber die Existenz von $M_D$ steht im Widerspruch zur Unentscheidbarkeit von $D$.

Damit kann es $M_{\bar{D}}$ nicht geben, und $\bar{D}$ ist nicht entscheidbar.

# Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems

Das *spezielle Halteproblem* ist definiert durch

$$H_\epsilon \;=\; \{\langle M\rangle \mid M \text{ hält auf Eingabe } \epsilon\} \;\; .$$

**Satz:**

Das spezielle Halteproblem $H_\epsilon$ ist nicht rekursiv.

**Beweis:** Wir nutzen die Unterprogrammtechnik. Aus einer TM $M_\epsilon$, die $H_\epsilon$ entscheidet, konstruieren wir eine TM $M_H$, die das nicht rekursive Halteproblem entscheiden würde.

# Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems – Beweis

Die TM $M_H$ mit Unterprogramm $M_\epsilon$ arbeitet wie folgt

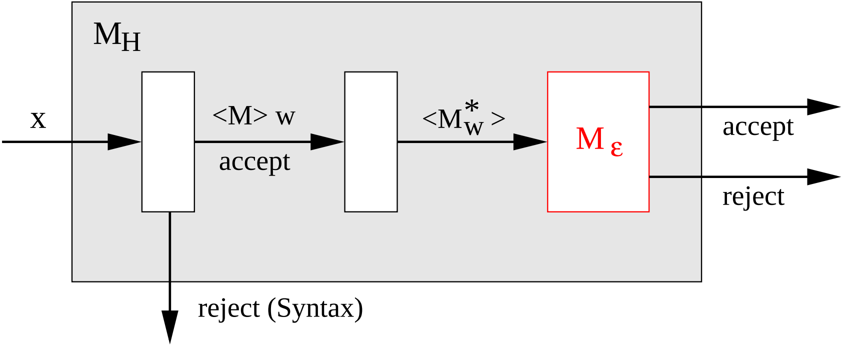
1) Falls die Eingabe nicht mit einer korrekten Gödelnummer beginnt, verwirft $M_H$ die Eingabe.
2) Sonst, also auf Eingaben der Form $\langle M \rangle w$, berechnet $M_H$ die Gödelnummer einer TM $M_w^*$ mit den folgenden Eigenschaften.

**Eigenschaften von $M_w^*$**

- Falls $M_w^*$ die Eingabe $\epsilon$ erhält, so schreibt sie das Wort $w$ aufs Band und simuliert die TM $M$ auf der Eingabe $w$.
- Auf anderen Eingaben kann sich $M_w^*$ beliebig verhalten.

3) Nachdem $M_H$ die Gödelnummer $\langle M_w^* \rangle$ auf das Band geschrieben hat, startet sie $M_\epsilon$ auf dieser Eingabe, und akzeptiert genau dann, wenn $M_\epsilon$ akzeptiert.

*Illustration:* Aus $M_\epsilon$ konstruieren wir $M_H$.




Aber die Existenz von $M_H$ steht im Widerspruch zur Unentscheidbarkeit von $H$. Damit kann es $M_\epsilon$ nicht geben, und das spezielle Halteproblem $H_\epsilon$ ist nicht entscheidbar.

# Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems – Beweis

*Terminierung:* Nach unseren Annahmen hält $M_\epsilon$ auf jeder Eingabe. Also hält auch $M_H$ auf jeder Eingabe.

*Korrektheit:* Sei $x = \langle M \rangle w$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x \in H \quad & \Rightarrow \quad M \text{ hält auf } w \\ & \Rightarrow \quad M_w^* \text{ hält auf der Eingabe } \epsilon \\ & \Rightarrow \quad M_\epsilon \text{ akzeptiert die Eingabe } \langle M_w^* \rangle \\ & \Rightarrow \quad M_H \text{ akzeptiert } x \ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \notin H \quad & \Rightarrow \quad M \text{ hält nicht auf } w \\ & \Rightarrow \quad M_w^* \text{ hält nicht auf der Eingabe } \epsilon \\ & \Rightarrow \quad M_\epsilon \text{ verwirft die Eingabe } \langle M_w^* \rangle \\ & \Rightarrow \quad M_H \text{ verwirft } x \ . \end{aligned}$$

□

# Weitere unentscheidbare Probleme

# Von TM berechnete Funktionen sind partielle Funktionen

Da TMn nicht auf jeder Eingabe halten, berechnen sie „partielle Funktionen". Das können wir wie folgt formalisieren:

- Die von einer TM $M$ berechnete Funktion ist von der Form

$$f_M : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^* \cup \{\perp\} \ .$$

  Das Zeichen $\perp$ steht dabei für *undefiniert* und bedeutet, dass die Maschine nicht hält.

- Im Fall von Entscheidungsproblemen vereinfacht sich die Funktion zu

$$f_M : \{0,1\}^* \to \{0,1,\perp\} \ .$$

  Dabei steht 0 für *Verwerfen*, 1 für *Akzeptieren* und $\perp$ für *Nicht-Halten*.

# Satz von Rice

**Satz:**

Sei $\mathcal{R}$ die Menge der von TM berechenbaren partiellen Funktionen und $S$ eine Teilmenge von $\mathcal{R}$ mit $\emptyset \neq S \neq \mathcal{R}$. Dann ist die Sprache

$$L(S) = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ berechnet eine Funktion aus } S \}$$

nicht rekursiv.

In anderen Worten: Aussagen über die von einer TM berechneten Funktion sind nicht entscheidbar.

# Satz von Rice – Anwendungsbeispiele

**Beispiel 1:**

- Sei $S = \{f_M \mid \forall w \in \{0,1\}^* : f_M(w) \neq \perp\}$.
- Dann ist

$$\begin{aligned} L(S) &= \{\langle M \rangle \mid M \text{ berechnet eine Funktion aus } S\} \\ &= \{\langle M \rangle \mid M \text{ hält auf jeder Eingabe}\} \end{aligned}$$

- Diese Sprache ist auch als das *allgemeine Halteproblem* $H_{\text{all}}$ bekannt.
- Gemäß Satz von Rice ist $H_{\text{all}}$ nicht entscheidbar.

# Satz von Rice – Anwendungsbeispiele

## Beispiel 2:

- Sei $L_{17} =$
  $\{\langle M\rangle \mid M$ berechnet bei Eingabe der Zahl 17 die Zahl 42$\}$.
- Es ist $L_{17} = L(S)$ für $S = \{f_M \mid f_M(bin(17)) = bin(42)\}$.
- Somit ist diese Sprache gemäß dem Satz von Rice nicht entscheidbar.

## Beispiel 3:

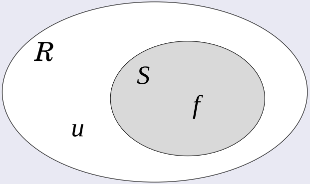
- Sei $H_{17} =$
  $\{\langle M\rangle \mid$ Auf jeder Eingabe stoppt $M$ nach $\leq 17$ Schritten$\}$.
- Über diese Sprache sagt der Satz von Rice nichts aus!!!
- Ist $H_{17}$ entscheidbar?

**Beweis:**

Wir nutzen die Unterprogrammtechnik. Aus einer TM $M_{L(S)}$, die $L(S)$ entscheidet, konstruieren wir eine TM $M_\epsilon$, die das spezielle Halteproblem $H_\epsilon$ entscheidet, und damit im Widerspruch zur Unentscheidbarkeit von $H_\epsilon$ steht.

### Einige Vereinbarungen:

- Sei $u$ die überall undefinierte Funktion.
- O.B.d.A. $u \notin S$.
- Sei $f$ eine Funktion aus $S$.
- Sei $N$ eine TM, die $f$ berechnet.




Bemerkung: Im Falle $u \in S$ betrachten wir $\bar{S} = R \setminus S$ statt $S$ und zeigen die Unentscheidbarkeit von $L(\bar{S})$, was dann ebenfalls die Unentscheidbarkeit von $L(S)$ impliziert.

# Satz von Rice – Fortsetzung Beweis

Die TM $M_\epsilon$ mit Unterprogramm $M_{L(S)}$ arbeitet wie folgt

1) Falls die Eingabe nicht aus einer korrekten Gödelnummer besteht, verwirft $M_\epsilon$ die Eingabe.
2) Sonst berechnet $M_\epsilon$ aus der Eingabe $\langle M \rangle$ die Gödelnummer einer TM $M^*$ mit den folgendem Verhalten.

**Verhalten von $M^*$ auf Eingabe $x$**

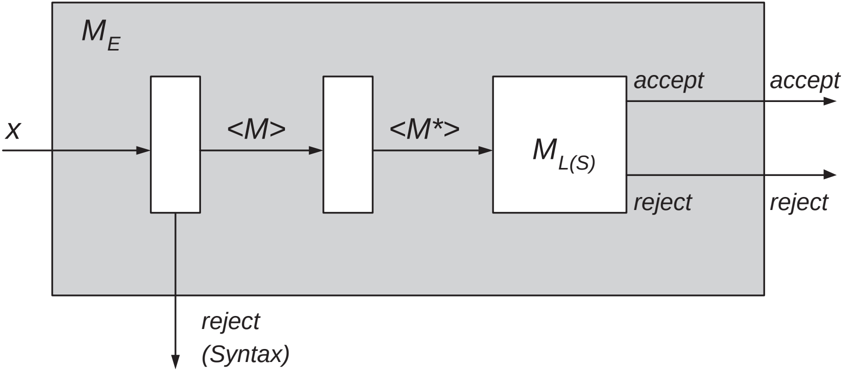
**Schritt A:** Simuliere das Verhalten von $M$ bei Eingabe $\epsilon$ auf einer für diesen Zweck reservierten Spur.

**Schritt B:** Simuliere das Verhalten von $N$ auf $x$, stoppe sobald $N$ stoppt und übernehme die Ausgabe.

3) Starte $M_{L(S)}$ mit der Eingabe $\langle M^* \rangle$ und übernehme das Akzeptanzverhalten.

# Satz von Rice – Illustration

*Illustration:* Aus $M_{L(S)}$ konstruieren wir $M_\epsilon$.




Aber die Existenz von $M_\epsilon$ steht im Widerspruch zur Unentscheidbarkeit von $H_\epsilon$. Daraus folgt, dass $M_{L(S)}$ ebenfalls nicht existiert, und $L(S)$ somit nicht entscheidbar ist.

# Satz von Rice – Fortsetzung Beweis

*Terminierung:*

Schritt 1) und 2) können in endlicher Zeit berechnet werden.

In Schritt 3) wird $M_{L(S)}$ auf der Eingabe $\langle M^* \rangle$ gestartet. Nach unseren Annahmen hält $M_{L(S)}$ auf jeder Eingabe.

Damit ist die Terminierung gesichert.

# Satz von Rice – Fortsetzung Beweis

*Korrektheit:*

Bei Eingabe von $w = \langle M \rangle$ gilt:

$$
\begin{aligned}
w \in H_\epsilon \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält auf } \epsilon \\
&\Rightarrow \quad M^* \text{ berechnet } f \\
&\Rightarrow \quad \langle M^* \rangle \in L(S) \\
&\Rightarrow \quad M_{L(S)} \text{ akzeptiert } \langle M^* \rangle \\
&\Rightarrow \quad M_\epsilon \text{ akzeptiert } w
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w \notin H_\epsilon \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält nicht auf } \epsilon \\
&\Rightarrow \quad M^* \text{ berechnet } u \\
&\Rightarrow \quad \langle M^* \rangle \notin L(S) \\
&\Rightarrow \quad M_{L(S)} \text{ verwirft } \langle M^* \rangle \\
&\Rightarrow \quad M_\epsilon \text{ verwirft } w
\end{aligned}
$$

$\square$