

Berechenbarkeit und Komplexität

Rekursive Aufzählbarkeit

Prof. Berthold Vöcking
präsentiert durch Prof. Joost-Pieter Katoen

11. November 2008

Eine Sprache L wird von einer TM M *entschieden*, wenn

- M auf jeder Eingabe hält, und
- M genau die Wörter aus L akzeptiert.

Eine Sprache L , für die eine TM existiert, die L entscheidet, wird als *rekursiv* oder auch als *entscheidbar* bezeichnet.

Eine Sprache L wird von einer TM M *erkannt*, wenn

- M jedes Wort aus L akzeptiert, und
- M kein Wort akzeptiert, das nicht in L enthalten ist.

Def: Eine Sprache L , für die eine TM existiert, die L erkennt, wird als *semi-entscheidbar* bezeichnet.

Beispiel einer nicht-entscheidbaren aber semi-entscheidbaren Sprache

Ein uns bekanntes nicht-rekursiven Problem ist das Halteproblem

$$H = \{ \langle M \rangle w \mid M \text{ hält auf } w \} .$$

Behauptung: Das Halteproblem ist semi-entscheidbar.

Arbeitsweise einer TM M' , die H erkennt

Erhält M' eine Eingabe der Form $\langle M \rangle w$ so

- simuliert M' die TM M mit Eingabe w , und
- akzeptiert, falls M auf w hält.

Syntaktisch inkorrekte Eingaben werden von M' verworfen.

Aufzähler, Rekursive Aufzählbarkeit – Definition

Ein *Aufzähler* für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist eine Variante einer TM mit einem angeschlossenen *Drucker* im Sinne eines zusätzlichen Ausgabebandes, auf dem sich der Kopf nur nach rechts bewegt.

Eigenschaften des Aufzählers

Gestartet mit leerem Arbeitsband, *enumeriert* der Aufzähler alle Wörter aus L (möglicherweise mit Wiederholungen) auf dem Drucker, d.h.

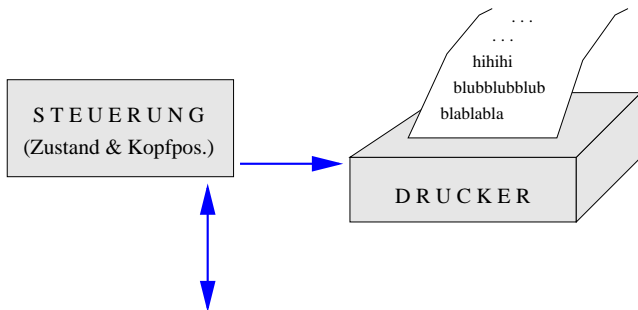
- gedruckt werden ausschließlich Wörter aus L , und
- jedes Wort aus L wird irgendwann ausgedruckt.

Die enumerierten Wörter sind durch ein Zeichen $\notin \Sigma$ getrennt.

Definition

Eine Sprache für die es einen Aufzähler gibt, heißt *rekursiv aufzählbar*.

Aufzähler – Illustration



Satz

Eine Sprache L ist genau dann semi-entscheidbar, wenn sie rekursiv aufzählbar ist.

Beweis:

Als erstes zeigen wir, wie man aus einem Aufzähler für L eine TM M konstruieren kann, die L erkennt.

- M simuliert den Aufzähler, d.h. schreibt alle Wörter die auf dem Drucker ausgegeben werden nacheinander aufs Band.
- Sobald ein neues Wort enumeriert worden ist, vergleicht M dieses Wort mit dem Eingabewort w und akzeptiert bei Übereinstimmung.

Falls $w \in L$, so wird w irgendwann enumeriert und somit von M akzeptiert. Falls $w \notin L$, so wird w nicht akzeptiert.

Zum Beweis der anderen Richtung zeigen wir nun, wie man aus einer TM M , die L erkennt, einen Aufzähler konstruiert.

Seien w_1, w_2, w_3, \dots die Wörter aus Σ^* in kanonischer Reihenfolge. Der Aufzähler arbeitet wie folgt.

Für $i = 1, 2, 3, \dots$

- Simuliere i Schritte von M auf jedem Wort aus w_1, \dots, w_i .
- Wird dabei eines der Worte akzeptiert, so drucke es aus.

Der Aufzähler druckt offensichtlich nur Wörter aus L aus. Aber druckt er auch alle Wörter aus L aus?

- Sei w_k ein Wort aus L .
- Sei t_k die Anzahl Schritte, die M benötigt, um w_k zu akzeptieren.
- In jeder Iteration $i \geq \max\{k, t_k\}$ druckt der Aufzähler dieses Wort somit aus.



Satz

- a) Wenn die Sprachen L_1 und L_2 rekursiv sind, so ist auch die Sprache $L_1 \cap L_2$ rekursiv.
- b) Wenn die Sprachen L_1 und L_2 rekursiv aufzählbar sind, so ist auch die Sprache $L_1 \cap L_2$ rekursiv aufzählbar.

Beweis:

a): Seien M_1 und M_2 zwei TM, die L_1 bzw. L_2 entscheiden.

Arbeitsweise einer TM M , die $L_1 \cap L_2$ entscheidet

- Auf Eingabe w , simuliert M zunächst das Verhalten von M_1 auf w und dann das Verhalten von M_2 auf w .
- Falls M_1 und M_2 akzeptieren, so akzeptiert auch M .

M akzeptiert offensichtlich die Eingaben aus $L_1 \cap L_2$ und hält auf jeder Eingabe, da sowohl M_1 als auch M_2 auf jeder Eingabe halten.

b): Seien nun M_1 und M_2 zwei TM, die L_1 bzw. L_2 erkennen.

Konstruktion wie in a) bis auf die Tatsache, dass die Terminierung im Falle $w \notin L_1 \cap L_2$ nicht sichergestellt ist. \square

Satz

- a) Wenn die Sprachen L_1 und L_2 rekursiv sind, so ist auch die Sprache $L_1 \cup L_2$ rekursiv.
- b) Wenn die Sprachen L_1 und L_2 rekursiv aufzählbar sind, so ist auch die Sprache $L_1 \cup L_2$ rekursiv aufzählbar.

Beweis:

a): Seien M_1 und M_2 zwei TM, die L_1 bzw. L_2 entscheiden.

Arbeitsweise einer TM M , die $L_1 \cup L_2$ entscheidet

- Auf Eingabe w , simuliert M zunächst das Verhalten von M_1 auf w und dann das Verhalten von M_2 auf w .
- Falls M_1 oder M_2 akzeptieren, so akzeptiert auch M .

M akzeptiert offensichtlich die Eingaben aus $L_1 \cup L_2$ und hält auf jeder Eingabe, da sowohl M_1 als auch M_2 auf jeder Eingabe halten.

b): Seien nun M_1 und M_2 zwei TMn, die L_1 bzw. L_2 erkennen.

Statt der „sequentiellen Simulation“ von M_1 und M_2 verwenden wir eine „parallele Simulation“ der beiden TM:

Arbeitsweise einer TM M , die $L_1 \cup L_2$ erkennt

- M verwendet jeweils ein Band für die Simulation des Bandes von M_1 und des Bandes von M_2 .
- Die Zustandsmenge von M enthält das Kreuzprodukt $Q_1 \times Q_2$ der Zustandsmengen von M_1 und M_2
- M akzeptiert, sobald eine der beiden TM akzeptiert.



„ $2 \times$ rekursiv aufzählbar = rekursiv“

Lemma

Seien $L \subseteq \Sigma^*$ und $\bar{L} = \Sigma^* \setminus L$ rekursiv aufzählbar. Dann ist L rekursiv.

Beweis: Seien M und \bar{M} zwei TMn, die L bzw. \bar{L} erkennen.

Die TM M' entscheidet L durch eine parallele Simulation von M und \bar{M} auf der Eingabe w :

- M' akzeptiert w , sobald M akzeptiert.
- M' verwirft w , sobald \bar{M} akzeptiert.

Da entweder $w \in L$ oder $w \notin L$, tritt eines dieser Ereignisse nach endlicher Zeit ein, so dass die Terminierung von M' sichergestellt ist. □

Beobachtung 1:

Wenn die Sprache L rekursiv ist, so ist auch \bar{L} rekursiv, da wir das Akzeptanzverhalten einer TM M , die M entscheidet invertieren können.

Beobachtung 2:

Die Menge der rekursiv aufzählbaren Sprachen ist hingegen nicht gegen Komplementbildung abgeschlossen.

Beispiel:

- H ist rekursiv aufzählbar.
- Wäre \bar{H} ebenfalls rekursiv aufzählbar, so wäre H rekursiv.
- Also ist \bar{H} nicht rekursiv aufzählbar.

Korollar

Für jede Sprache L gilt eine der beiden folgenden Eigenschaften.

- L ist rekursiv und sowohl L als auch \bar{L} sind rekursiv aufzählbar.
- L ist nicht rekursiv und L oder \bar{L} sind nicht rekursiv aufzählbar.

Der letzte dieser beiden Fälle erlaubt auch, dass sowohl L als auch \bar{L} nicht rekursiv aufzählbar sind.

Wir behaupten, beispielsweise die Sprache

$$H_{\text{all}} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ hält auf jede Eingabe}\}$$

hat diese Eigenschaft.