Berechenbarkeit und Komplexität

Die Reduktionstechnik

Prof. Berthold Vöcking
präsentiert durch Prof. Joost-Pieter Katoen

18. November 2008

Rehearsal: Rekursive Aufzählbarkeit

Ein *Aufzähler für eine Sprache* $L \subseteq \Sigma^*$ ist eine Variante einer TM mit einem angeschlossenen *Drucker* im Sinne eines zusätzlichen Ausgabebandes, auf dem sich der Kopf nur nach rechts bewegt.

Rehearsal: Rekursive Aufzählbarkeit

Ein *Aufzähler für eine Sprache* $L \subseteq \Sigma^*$ ist eine Variante einer TM mit einem angeschlossenen *Drucker* im Sinne eines zusätzlichen Ausgabebandes, auf dem sich der Kopf nur nach rechts bewegt.

Eigenschaften des Aufzählers

Gestartet mit leerem Arbeitsband, *enummeriert* der Aufzähler alle Wörter aus L (möglicherweise mit Wiederholungen) auf dem Drucker, d.h.

- gedruckt werden ausschließlich Wörter aus L, und
- jedes Wort aus L wird irgendwann ausgedruckt.

Rehearsal: Rekursive Aufzählbarkeit

Ein *Aufzähler für eine Sprache* $L \subseteq \Sigma^*$ ist eine Variante einer TM mit einem angeschlossenen *Drucker* im Sinne eines zusätzlichen Ausgabebandes, auf dem sich der Kopf nur nach rechts bewegt.

Eigenschaften des Aufzählers

Gestartet mit leerem Arbeitsband, *enummeriert* der Aufzähler alle Wörter aus L (möglicherweise mit Wiederholungen) auf dem Drucker, d.h.

- gedruckt werden ausschließlich Wörter aus L, und
- jedes Wort aus L wird irgendwann ausgedruckt.

Die enummerierten Wörter sind durch ein Zeichen $\notin \Sigma$ getrennt.

Rehearsal: Rekursive Aufzählbarkeit

Ein *Aufzähler für eine Sprache* $L \subseteq \Sigma^*$ ist eine Variante einer TM mit einem angeschlossenen *Drucker* im Sinne eines zusätzlichen Ausgabebandes, auf dem sich der Kopf nur nach rechts bewegt.

Eigenschaften des Aufzählers

Gestartet mit leerem Arbeitsband, *enummeriert* der Aufzähler alle Wörter aus L (möglicherweise mit Wiederholungen) auf dem Drucker, d.h.

- gedruckt werden ausschließlich Wörter aus L, und
- jedes Wort aus L wird irgendwann ausgedruckt.

Die enummerierten Wörter sind durch ein Zeichen $\notin \Sigma$ getrennt.

Definition

Eine Sprache für die es einen Aufzähler gibt, heißt *rekursiv aufzählbar*.

Semi-Entscheidbarkeit

Semi-entscheidbar

Eine Sprache L, für die eine TM existiert, die L erkennt, wird als *semi-entscheidbar* bezeichnet.

Semi-Entscheidbarkeit

Semi-entscheidbar

Eine Sprache L, für die eine TM existiert, die L erkennt, wird als *semi-entscheidbar* bezeichnet.

Eine Sprache L wird von einer TM M *erkannt*, wenn

- M jedes Wort aus L akzeptiert, und
- M kein Wort akzeptiert, das nicht in L enthalten ist.

Rekursiv Aufzählbar = Semi-entscheidbar

Satz

Eine Sprache L ist genau dann semi-entscheidbar, wenn sie rekursiv aufzählbar ist.

Korollar

Für jede Sprache L gilt eine der beiden folgenden Eigenschaften.

- L ist rekursiv und sowohl L als auch $\bar{L}$ sind rekursiv aufzählbar.
- L ist nicht rekursiv und L oder $\bar{L}$ (oder beide) sind nicht rekursiv aufzählbar.

Rekursiv versus Rekursiv aufzählbarkeit

Korollar

Für jede Sprache L gilt eine der beiden folgenden Eigenschaften.

- L ist rekursiv und sowohl L als auch $\bar{L}$ sind rekursiv aufzählbar.
- L ist nicht rekursiv und L oder $\bar{L}$ (oder beide) sind nicht rekursiv aufzählbar.

Wir behaupten, beispielsweise die Sprache

$$H_{\text{all}} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ hält auf jede Eingabe}\}$$

hat diese Eigenschaft.

Die Reduktion

Wie kann man nachweisen, dass sowohl H_{all} als auch $\bar{H}_{\text{all}}$ nicht rekursiv aufzählbar sind?

Die Reduktion

Wie kann man nachweisen, dass sowohl H_{all} als auch $\bar{H}_{\text{all}}$ nicht rekursiv aufzählbar sind?

Die Reduktion ist eine Spezialisierung der Unterprogrammtechnik, die gut zum Nachweis rekursiver Aufzählbarkeit geeignet ist.

Die Reduktion

Wie kann man nachweisen, dass sowohl H_{all} als auch $\bar{H}_{\text{all}}$ nicht rekursiv aufzählbar sind?

Die Reduktion ist eine Spezialisierung der Unterprogrammtechnik, die gut zum Nachweis rekursiver Aufzählbarkeit geeignet ist.

Definition

Es seien L_1 und L_2 Sprachen über einem Alphabet Σ. Dann heißt L_1 auf L_2 *reduzierbar*, Notation $L_1 \leq L_2$, wenn es eine berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ gibt, so dass für alle $x \in \Sigma^*$ gilt

$$x \in L_1 \;\Leftrightarrow\; f(x) \in L_2 \;.$$

Die Reduktion

Lemma

Falls $L_1 \leq L_2$ und L_2 rekursiv aufzählbar ist, so ist L_1 rekursiv aufzählbar.

Die Reduktion

Lemma

Falls $L_1 \leq L_2$ und L_2 rekursiv aufzählbar ist, so ist L_1 rekursiv aufzählbar.

Beweis: Wir konstruieren eine TM M_1, die L_1 erkennt, durch Unterprogrammaufruf einer TM M_2, die L_2 erkennt:

Lemma

Falls $L_1 \leq L_2$ und L_2 rekursiv aufzählbar ist, so ist L_1 rekursiv aufzählbar.

Beweis: Wir konstruieren eine TM M_1, die L_1 erkennt, durch Unterprogrammaufruf einer TM M_2, die L_2 erkennt:

- Die TM M_1 berechnet $f(x)$ aus ihrer Eingabe x.
- Dann simuliert M_1 die TM M_2 mit der Eingabe $f(x)$ und übernimmt das Akzeptanzverhalten.

Die Reduktion

Lemma

Falls $L_1 \leq L_2$ und L_2 rekursiv aufzählbar ist, so ist L_1 rekursiv aufzählbar.

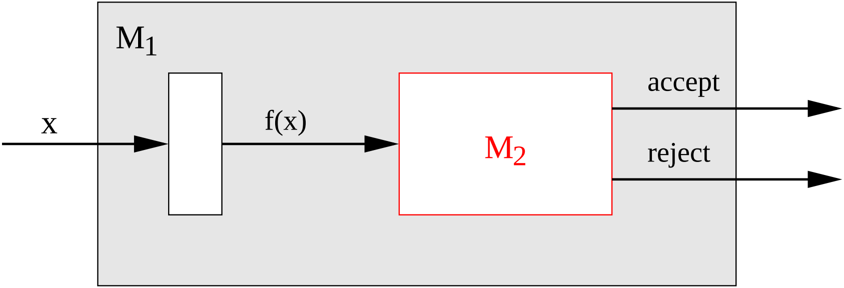
Beweis: Wir konstruieren eine TM M_1, die L_1 erkennt, durch Unterprogrammaufruf einer TM M_2, die L_2 erkennt:

- Die TM M_1 berechnet $f(x)$ aus ihrer Eingabe x.
- Dann simuliert M_1 die TM M_2 mit der Eingabe $f(x)$ und übernimmt das Akzeptanzverhalten.

Korrektheit:

$$M_1 \text{ akz } x \;\Leftrightarrow\; M_2 \text{ akz } f(x) \;\Leftrightarrow\; f(x) \in L_2 \;\Leftrightarrow\; x \in L_1 \;.$$

Die Reduktion



Die Reduktion

Es gilt übrigens auch

Lemma

Falls $L_1 \leq L_2$ und L_2 rekursiv ist, so ist L_1 rekursiv.

Die Reduktion

Es gilt übrigens auch

Lemma

Falls $L_1 \leq L_2$ und L_2 rekursiv ist, so ist L_1 rekursiv.

Dieses Lemma folgt direkt daraus, dass die Reduktion eine spezialisierte Variante der Unterprogrammtechnik ist.

Anwendung der Reduktion

H_ϵ ist nicht rekursiv aber rekursiv aufzählbar. Folglich ist $\bar{H}_\epsilon$ nicht rekursiv aufzählbar.

Anwendung der Reduktion

H_ϵ ist nicht rekursiv aber rekursiv aufzählbar. Folglich ist $\bar{H}_\epsilon$ nicht rekursiv aufzählbar.

Wir zeigen nun

Behauptung A

$$\bar{H}_\epsilon \leq \bar{H}_{\text{all}}$$

Behauptung B

$$\bar{H}_\epsilon \leq H_{\text{all}}$$

Anwendung der Reduktion

H_ϵ ist nicht rekursiv aber rekursiv aufzählbar. Folglich ist $\bar{H}_\epsilon$ nicht rekursiv aufzählbar.

Wir zeigen nun

Behauptung A

$$\bar{H}_\epsilon \leq \bar{H}_{\text{all}}$$

Behauptung B

$$\bar{H}_\epsilon \leq H_{\text{all}}$$

Wäre also $\bar{H}_{\text{all}}$ oder H_{all} rekursiv aufzählbar, so wäre auch $\bar{H}_\epsilon$ rekursiv aufzählbar.

Anwendung der Reduktion

H_ϵ ist nicht rekursiv aber rekursiv aufzählbar. Folglich ist $\bar{H}_\epsilon$ nicht rekursiv aufzählbar.

Wir zeigen nun

Behauptung A

$$\bar{H}_\epsilon \leq \bar{H}_{\text{all}}$$

Behauptung B

$$\bar{H}_\epsilon \leq H_{\text{all}}$$

Wäre also $\bar{H}_{\text{all}}$ oder H_{all} rekursiv aufzählbar, so wäre auch $\bar{H}_\epsilon$ rekursiv aufzählbar. Also folgt

Satz

Sowohl $\bar{H}_{\text{all}}$ als auch H_{all} sind nicht rekursiv aufzählbar.

Beweis von Behauptung A: $\bar{H}_\epsilon \leq \bar{H}_{\text{all}}$

Wir konstruieren eine berechenbare Funktion f, die Ja-Instanzen von $\bar{H}_\epsilon$ auf Ja-Instanzen von $\bar{H}_{\text{all}}$ abbildet, und Nein-Instanzen von $\bar{H}_\epsilon$ auf Nein-Instanzen von $\bar{H}_{\text{all}}$ abbildet.

Beweis von Behauptung A: $\bar{H}_\epsilon \leq \bar{H}_{\text{all}}$

Wir konstruieren eine berechenbare Funktion f, die Ja-Instanzen von $\bar{H}_\epsilon$ auf Ja-Instanzen von $\bar{H}_{\text{all}}$ abbildet, und Nein-Instanzen von $\bar{H}_\epsilon$ auf Nein-Instanzen von $\bar{H}_{\text{all}}$ abbildet.

Die Funktion f

Sei w die Eingabe für $\bar{H}_\epsilon$.

- Wenn w keine gültige Gödelnummer ist, so sei $f(w) = w$.

Beweis von Behauptung A: $\bar{H}_\epsilon \le \bar{H}_{\text{all}}$

Wir konstruieren eine berechenbare Funktion f, die Ja-Instanzen von $\bar{H}_\epsilon$ auf Ja-Instanzen von $\bar{H}_{\text{all}}$ abbildet, und Nein-Instanzen von $\bar{H}_\epsilon$ auf Nein-Instanzen von $\bar{H}_{\text{all}}$ abbildet.

Die Funktion f

Sei w die Eingabe für $\bar{H}_\epsilon$.

- Wenn w keine gültige Gödelnummer ist, so sei $f(w) = w$.
- Falls $w = \langle M \rangle$ für eine TM M, so sei $f(w)$ die Gödelnummer einer TM M_ϵ^* mit der folgenden Eigenschaft: M_ϵ^* ignoriert die Eingabe und simuliert M mit der Eingabe ϵ.

Wir konstruieren eine berechenbare Funktion f, die Ja-Instanzen von $\bar{H}_\epsilon$ auf Ja-Instanzen von $\bar{H}_{\text{all}}$ abbildet, und Nein-Instanzen von $\bar{H}_\epsilon$ auf Nein-Instanzen von $\bar{H}_{\text{all}}$ abbildet.

Die Funktion f

Sei w die Eingabe für $\bar{H}_\epsilon$.

- Wenn w keine gültige Gödelnummer ist, so sei $f(w) = w$.
- Falls $w = \langle M \rangle$ für eine TM M, so sei $f(w)$ die Gödelnummer einer TM M_ϵ^* mit der folgenden Eigenschaft: M_ϵ^* ignoriert die Eingabe und simuliert M mit der Eingabe ϵ.

Die Funktion f ist offensichtlich berechenbar.

Beweis von Behauptung A: $\bar{H}_\epsilon \leq \bar{H}_{\text{all}}$

Wir konstruieren eine berechenbare Funktion f, die Ja-Instanzen von $\bar{H}_\epsilon$ auf Ja-Instanzen von $\bar{H}_{\text{all}}$ abbildet, und Nein-Instanzen von $\bar{H}_\epsilon$ auf Nein-Instanzen von $\bar{H}_{\text{all}}$ abbildet.

Die Funktion f

Sei w die Eingabe für $\bar{H}_\epsilon$.

- Wenn w keine gültige Gödelnummer ist, so sei $f(w) = w$.
- Falls $w = \langle M \rangle$ für eine TM M, so sei $f(w)$ die Gödelnummer einer TM M_ϵ^* mit der folgenden Eigenschaft: M_ϵ^* ignoriert die Eingabe und simuliert M mit der Eingabe ϵ.

Die Funktion f ist offensichtlich berechenbar.

Falls w keine Gödelnummer ist, so ist die Korrektheit klar, denn in diesem Fall gilt $w \in \bar{H}_\epsilon$ und $f(w) \in \bar{H}_{\text{all}}$.

Beweis von Behauptung A: $\bar{H}_\epsilon \leq \bar{H}_{\text{all}}$ — Fortsetzung

Sei nun $w = \langle M \rangle$ für eine TM M, so dass $f(w) = \langle M_\epsilon^* \rangle$. Es gilt

$$w \notin \bar{H}_\epsilon \quad \Rightarrow \quad M \text{ hält auf der Eingabe } \epsilon$$

Beweis von Behauptung A: $\bar{H}_\epsilon \leq \bar{H}_{\text{all}}$ — Fortsetzung

Sei nun $w = \langle M \rangle$ für eine TM M, so dass $f(w) = \langle M_\epsilon^* \rangle$. Es gilt

$$\begin{aligned} w \notin \bar{H}_\epsilon \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält auf der Eingabe } \epsilon \\ &\Rightarrow \quad M_\epsilon^* \text{ hält auf jeder Eingabe} \end{aligned}$$

Beweis von Behauptung A: $\bar{H}_\epsilon \le \bar{H}_{\text{all}}$ — Fortsetzung

Sei nun $w = \langle M \rangle$ für eine TM M, so dass $f(w) = \langle M_\epsilon^* \rangle$. Es gilt

$$\begin{aligned} w \notin \bar{H}_\epsilon &\Rightarrow M \text{ hält auf der Eingabe } \epsilon \\ &\Rightarrow M_\epsilon^* \text{ hält auf jeder Eingabe} \\ &\Rightarrow \langle M_\epsilon^* \rangle \in H_{\text{all}} \end{aligned}$$

Beweis von Behauptung A: $\bar{H}_\epsilon \leq \bar{H}_{\text{all}}$ — Fortsetzung

Sei nun $w = \langle M \rangle$ für eine TM M, so dass $f(w) = \langle M_\epsilon^* \rangle$. Es gilt

$$
\begin{aligned}
w \notin \bar{H}_\epsilon \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält auf der Eingabe } \epsilon \\
&\Rightarrow \quad M_\epsilon^* \text{ hält auf jeder Eingabe} \\
&\Rightarrow \quad \langle M_\epsilon^* \rangle \in H_{\text{all}} \\
&\Rightarrow \quad f(w) \notin \bar{H}_{\text{all}} \quad .
\end{aligned}
$$

Sei nun $w = \langle M \rangle$ für eine TM M, so dass $f(w) = \langle M_\epsilon^* \rangle$. Es gilt

$$
\begin{aligned}
w \notin \bar{H}_\epsilon \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält auf der Eingabe } \epsilon \\
&\Rightarrow \quad M_\epsilon^* \text{ hält auf jeder Eingabe} \\
&\Rightarrow \quad \langle M_\epsilon^* \rangle \in H_{\text{all}} \\
&\Rightarrow \quad f(w) \notin \bar{H}_{\text{all}} \quad .
\end{aligned}
$$

$$
w \in \bar{H}_\epsilon \quad \Rightarrow \quad M \text{ hält nicht auf Eingabe } \epsilon
$$

Sei nun $w = \langle M \rangle$ für eine TM M, so dass $f(w) = \langle M_\epsilon^* \rangle$. Es gilt

$$\begin{aligned} w \notin \bar{H}_\epsilon \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält auf der Eingabe } \epsilon \\ &\Rightarrow \quad M_\epsilon^* \text{ hält auf jeder Eingabe} \\ &\Rightarrow \quad \langle M_\epsilon^* \rangle \in H_{\text{all}} \\ &\Rightarrow \quad f(w) \notin \bar{H}_{\text{all}} \quad . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w \in \bar{H}_\epsilon \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält nicht auf Eingabe } \epsilon \\ &\Rightarrow \quad M_\epsilon^* \text{ hält auf keiner Eingabe} \end{aligned}$$

Beweis von Behauptung A: $\bar{H}_\epsilon \leq \bar{H}_{\text{all}}$ — Fortsetzung

Sei nun $w = \langle M \rangle$ für eine TM M, so dass $f(w) = \langle M_\epsilon^* \rangle$. Es gilt

$$
\begin{aligned}
w \notin \bar{H}_\epsilon \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält auf der Eingabe } \epsilon \\
&\Rightarrow \quad M_\epsilon^* \text{ hält auf jeder Eingabe} \\
&\Rightarrow \quad \langle M_\epsilon^* \rangle \in H_{\text{all}} \\
&\Rightarrow \quad f(w) \notin \bar{H}_{\text{all}} \quad .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w \in \bar{H}_\epsilon \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält nicht auf Eingabe } \epsilon \\
&\Rightarrow \quad M_\epsilon^* \text{ hält auf keiner Eingabe} \\
&\Rightarrow \quad \langle M_\epsilon^* \rangle \notin H_{\text{all}}
\end{aligned}
$$

Beweis von Behauptung A: $\bar{H}_\epsilon \leq \bar{H}_{\text{all}}$ — Fortsetzung

Sei nun $w = \langle M \rangle$ für eine TM M, so dass $f(w) = \langle M^*_\epsilon \rangle$. Es gilt

$$\begin{aligned} w \notin \bar{H}_\epsilon \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält auf der Eingabe } \epsilon \\ &\Rightarrow \quad M^*_\epsilon \text{ hält auf jeder Eingabe} \\ &\Rightarrow \quad \langle M^*_\epsilon \rangle \in H_{\text{all}} \\ &\Rightarrow \quad f(w) \notin \bar{H}_{\text{all}} \ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w \in \bar{H}_\epsilon \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält nicht auf Eingabe } \epsilon \\ &\Rightarrow \quad M^*_\epsilon \text{ hält auf keiner Eingabe} \\ &\Rightarrow \quad \langle M^*_\epsilon \rangle \notin H_{\text{all}} \\ &\Rightarrow \quad f(w) \in \bar{H}_{\text{all}} \ . \end{aligned}$$

Sei nun $w = \langle M \rangle$ für eine TM M, so dass $f(w) = \langle M_\epsilon^* \rangle$. Es gilt

$$\begin{aligned} w \notin \bar{H}_\epsilon \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält auf der Eingabe } \epsilon \\ &\Rightarrow \quad M_\epsilon^* \text{ hält auf jeder Eingabe} \\ &\Rightarrow \quad \langle M_\epsilon^* \rangle \in H_{\text{all}} \\ &\Rightarrow \quad f(w) \notin \bar{H}_{\text{all}} \ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w \in \bar{H}_\epsilon \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält nicht auf Eingabe } \epsilon \\ &\Rightarrow \quad M_\epsilon^* \text{ hält auf keiner Eingabe} \\ &\Rightarrow \quad \langle M_\epsilon^* \rangle \notin H_{\text{all}} \\ &\Rightarrow \quad f(w) \in \bar{H}_{\text{all}} \ . \end{aligned}$$

Also gilt $w \in \bar{H}_\epsilon \Leftrightarrow f(w) \in \bar{H}_{\text{all}}$ und somit ist die Funktion f korrekt konstruiert. $\square$

Beweis von Behauptung B: $\bar{H}_\epsilon \leq H_{\text{all}}$

Wir konstruieren eine berechenbare Funktion f, die Ja-Instanzen von $\bar{H}_\epsilon$ auf Ja-Instanzen von H_{all} abbildet, und Nein-Instanzen von $\bar{H}_\epsilon$ auf Nein-Instanzen von H_{all} abbildet.

Beweis von Behauptung B: $\bar{H}_\epsilon \leq H_{\text{all}}$

Wir konstruieren eine berechenbare Funktion f, die Ja-Instanzen von $\bar{H}_\epsilon$ auf Ja-Instanzen von H_{all} abbildet, und Nein-Instanzen von $\bar{H}_\epsilon$ auf Nein-Instanzen von H_{all} abbildet.

Die Funktion f

Sei w die Eingabe für $\bar{H}_\epsilon$. Sei w' irgendein Wort aus H_{all}.

- Wenn w keine gültige Gödelnummer ist, so sei $f(w) = w'$.

Beweis von Behauptung B: $\bar{H}_\epsilon \leq H_{\text{all}}$

Wir konstruieren eine berechenbare Funktion f, die Ja-Instanzen von $\bar{H}_\epsilon$ auf Ja-Instanzen von H_{all} abbildet, und Nein-Instanzen von $\bar{H}_\epsilon$ auf Nein-Instanzen von H_{all} abbildet.

Die Funktion f

Sei w die Eingabe für $\bar{H}_\epsilon$. Sei w' irgendein Wort aus H_{all}.

- Wenn w keine gültige Gödelnummer ist, so sei $f(w) = w'$.
- Falls $w = \langle M \rangle$ für eine TM M, so sei $f(w)$ die Gödelnummer einer TM M'_M, die sich auf Eingaben der Länge i wie folgt verhält: M'_M simuliert die ersten i Schritte von M auf der Eingabe ϵ. Wenn M innerhalb dieser i Schritte hält, dann geht M'_M in eine Endlosschleife, ansonsten hält M'_M.

Beweis von Behauptung B: $\bar{H}_\epsilon \le H_{\text{all}}$

Wir konstruieren eine berechenbare Funktion f, die Ja-Instanzen von $\bar{H}_\epsilon$ auf Ja-Instanzen von H_{all} abbildet, und Nein-Instanzen von $\bar{H}_\epsilon$ auf Nein-Instanzen von H_{all} abbildet.

Die Funktion f

Sei w die Eingabe für $\bar{H}_\epsilon$. Sei w' irgendein Wort aus H_{all}.

- Wenn w keine gültige Gödelnummer ist, so sei $f(w) = w'$.
- Falls $w = \langle M \rangle$ für eine TM M, so sei $f(w)$ die Gödelnummer einer TM M'_M, die sich auf Eingaben der Länge i wie folgt verhält: M'_M simuliert die ersten i Schritte von M auf der Eingabe ϵ. Wenn M innerhalb dieser i Schritte hält, dann geht M'_M in eine Endlosschleife, ansonsten hält M'_M.

Die Funktion f ist offensichtlich berechenbar.

Beweis von Behauptung B: $\bar{H}_\epsilon \leq H_{\text{all}}$

Wir konstruieren eine berechenbare Funktion f, die Ja-Instanzen von $\bar{H}_\epsilon$ auf Ja-Instanzen von H_{all} abbildet, und Nein-Instanzen von $\bar{H}_\epsilon$ auf Nein-Instanzen von H_{all} abbildet.

Die Funktion f

Sei w die Eingabe für $\bar{H}_\epsilon$. Sei w' irgendein Wort aus H_{all}.

- Wenn w keine gültige Gödelnummer ist, so sei $f(w) = w'$.
- Falls $w = \langle M \rangle$ für eine TM M, so sei $f(w)$ die Gödelnummer einer TM M'_M, die sich auf Eingaben der Länge i wie folgt verhält: M'_M simuliert die ersten i Schritte von M auf der Eingabe ϵ. Wenn M innerhalb dieser i Schritte hält, dann geht M'_M in eine Endlosschleife, ansonsten hält M'_M.

Die Funktion f ist offensichtlich berechenbar.

Falls w keine Gödelnummer ist die Korrektheit klar, denn in diesem Fall gilt $w \in \bar{H}_\epsilon$ und $f(w) = w' \in H_{\text{all}}$.

Sei nun $w = \langle M \rangle$ für eine TM M, so dass $f(w) = \langle M'_M \rangle$.

$w \notin \bar{H}_\epsilon \quad \Rightarrow \quad M$ hält auf der Eingabe ϵ

Beweis von Behauptung B: $\bar{H}_\epsilon \leq H_{\text{all}}$ — Fortsetzung

Sei nun $w = \langle M \rangle$ für eine TM M, so dass $f(w) = \langle M'_M \rangle$.

$$
\begin{aligned}
w \notin \bar{H}_\epsilon \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält auf der Eingabe } \epsilon \\
&\Rightarrow \quad \exists i\colon M \text{ hält innerhalb von } i \text{ Schritten auf } \epsilon
\end{aligned}
$$

Beweis von Behauptung B: $\bar{H}_\epsilon \leq H_{\text{all}}$ — Fortsetzung

Sei nun $w = \langle M \rangle$ für eine TM M, so dass $f(w) = \langle M'_M \rangle$.

$$\begin{aligned} w \notin \bar{H}_\epsilon \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält auf der Eingabe } \epsilon \\ &\Rightarrow \quad \exists i\colon M \text{ hält innerhalb von } i \text{ Schritten auf } \epsilon \\ &\Rightarrow \quad \exists i\colon M'_M \text{ hält nicht auf Eingaben der Länge } i \end{aligned}$$

Sei nun $w = \langle M \rangle$ für eine TM M, so dass $f(w) = \langle M'_M \rangle$.

$$
\begin{aligned}
w \notin \bar{H}_\epsilon \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält auf der Eingabe } \epsilon \\
&\Rightarrow \quad \exists i\colon M \text{ hält innerhalb von } i \text{ Schritten auf } \epsilon \\
&\Rightarrow \quad \exists i\colon M'_M \text{ hält nicht auf Eingaben der Länge } i \\
&\Rightarrow \quad f(w) = \langle M'_M \rangle \notin H_{\text{all}} \quad .
\end{aligned}
$$

Sei nun $w = \langle M \rangle$ für eine TM M, so dass $f(w) = \langle M'_M \rangle$.

$$
\begin{aligned}
w \notin \bar{H}_\epsilon \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält auf der Eingabe } \epsilon \\
&\Rightarrow \quad \exists i\colon M \text{ hält innerhalb von } i \text{ Schritten auf } \epsilon \\
&\Rightarrow \quad \exists i\colon M'_M \text{ hält nicht auf Eingaben der Länge } i \\
&\Rightarrow \quad f(w) = \langle M'_M \rangle \notin H_{\text{all}} \enspace .
\end{aligned}
$$

$$
w \in \bar{H}_\epsilon \quad \Rightarrow \quad M \text{ hält nicht auf der Eingabe } \epsilon
$$

Sei nun $w = \langle M \rangle$ für eine TM M, so dass $f(w) = \langle M'_M \rangle$.

$$\begin{aligned}
w \notin \bar{H}_\epsilon \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält auf der Eingabe } \epsilon \\
&\Rightarrow \quad \exists i\colon M \text{ hält innerhalb von } i \text{ Schritten auf } \epsilon \\
&\Rightarrow \quad \exists i\colon M'_M \text{ hält nicht auf Eingaben der Länge } i \\
&\Rightarrow \quad f(w) = \langle M'_M \rangle \notin H_{\text{all}} \ .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w \in \bar{H}_\epsilon \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält nicht auf der Eingabe } \epsilon \\
&\Rightarrow \quad \neg\exists i\colon M \text{ hält innerhalb von } i \text{ Schritten auf } \epsilon
\end{aligned}$$

Beweis von Behauptung B: $\bar{H}_\epsilon \leq H_{\text{all}}$ — Fortsetzung

Sei nun $w = \langle M \rangle$ für eine TM M, so dass $f(w) = \langle M'_M \rangle$.

$$\begin{aligned}
w \notin \bar{H}_\epsilon \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält auf der Eingabe } \epsilon \\
&\Rightarrow \quad \exists i\colon M \text{ hält innerhalb von } i \text{ Schritten auf } \epsilon \\
&\Rightarrow \quad \exists i\colon M'_M \text{ hält nicht auf Eingaben der Länge } i \\
&\Rightarrow \quad f(w) = \langle M'_M \rangle \notin H_{\text{all}} \ .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w \in \bar{H}_\epsilon \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält nicht auf der Eingabe } \epsilon \\
&\Rightarrow \quad \neg\exists i\colon M \text{ hält innerhalb von } i \text{ Schritten auf } \epsilon \\
&\Rightarrow \quad \forall i\colon M'_M \text{ hält auf Eingaben der Länge } i
\end{aligned}$$

Beweis von Behauptung B: $\bar{H}_\epsilon \le H_{\text{all}}$ — Fortsetzung

Sei nun $w = \langle M \rangle$ für eine TM M, so dass $f(w) = \langle M'_M \rangle$.

$$\begin{aligned}
w \notin \bar{H}_\epsilon \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält auf der Eingabe } \epsilon \\
&\Rightarrow \quad \exists i\colon M \text{ hält innerhalb von } i \text{ Schritten auf } \epsilon \\
&\Rightarrow \quad \exists i\colon M'_M \text{ hält nicht auf Eingaben der Länge } i \\
&\Rightarrow \quad f(w) = \langle M'_M \rangle \notin H_{\text{all}} \ .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w \in \bar{H}_\epsilon \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält nicht auf der Eingabe } \epsilon \\
&\Rightarrow \quad \neg\exists i\colon M \text{ hält innerhalb von } i \text{ Schritten auf } \epsilon \\
&\Rightarrow \quad \forall i\colon M'_M \text{ hält auf Eingaben der Länge } i \\
&\Rightarrow \quad f(w) = \langle M'_M \rangle \in H_{\text{all}} \ .
\end{aligned}$$

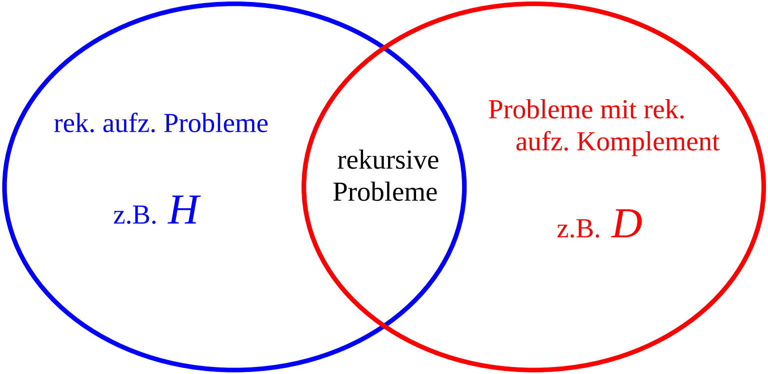
Sei nun $w = \langle M \rangle$ für eine TM M, so dass $f(w) = \langle M'_M \rangle$.

$$\begin{aligned} w \notin \bar{H}_\epsilon \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält auf der Eingabe } \epsilon \\ &\Rightarrow \quad \exists i\colon M \text{ hält innerhalb von } i \text{ Schritten auf } \epsilon \\ &\Rightarrow \quad \exists i\colon M'_M \text{ hält nicht auf Eingaben der Länge } i \\ &\Rightarrow \quad f(w) = \langle M'_M \rangle \notin H_{\text{all}} \quad . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w \in \bar{H}_\epsilon \quad &\Rightarrow \quad M \text{ hält nicht auf der Eingabe } \epsilon \\ &\Rightarrow \quad \neg\exists i\colon M \text{ hält innerhalb von } i \text{ Schritten auf } \epsilon \\ &\Rightarrow \quad \forall i\colon M'_M \text{ hält auf Eingaben der Länge } i \\ &\Rightarrow \quad f(w) = \langle M'_M \rangle \in H_{\text{all}} \quad . \end{aligned}$$

Also gilt $w \in \bar{H}_\epsilon \Leftrightarrow f(w) \in H_{\text{all}}$ und somit ist die Funktion f korrekt konstruiert. $\square$

Berechenbarkeitslandschaft



nicht rek. aufz. Probleme, deren Komplement ebenfalls nicht rek. aufz. ist

z.B. H_{all}