Lehrstuhl für Informatik 1
Prof. Dr. Berthold Vöcking
Alexander Skopalik
Matthias Englert

WS 2007/08
14.12.2007

Präsenzübung

Berechenbarkeit und Komplexität

Name: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Studiengang: ....

Hinweise:

- Bitte versehen Sie jedes Blatt mit Namen und Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie deutlich. Unleserliches wird nicht korrigiert und als fehlerhaft gewertet.
- Streichen Sie Konzeptrechnungen, die nicht gewertet werden sollen, durch, oder machen Sie sie andersweitig kenntlich. Bei mehreren Lösungsversuchen pro Aufgabe wird der schlechtere gewertet.
- Bitte verwenden Sie einen dokumentenechten Stift mit blauer oder schwarzer Tinte, und verwenden Sie keinen Tintenkiller oder ähnliches. Benutzen Sie ausschließlich das zur Verfügung gestellte Papier.
- Halten Sie bitte Ihren Studierendenausweis und einen Lichtbildausweis zur Kontrolle bereit.
- Bitte schalten Sie Ihre Mobiltelefone aus!
- Die Präsenzübung besteht aus 3 Aufgaben mit Unteraufgaben. Zwischen den Aufgaben ist jeweils so viel Platz zur Verfügung gestellt, wie für die Bearbeitung der Aufgabe notwendig ist. Gegebenenfalls können Sie auch noch die Rückseiten der Blätter verwenden oder zusätzliches Papier erfragen.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 1 Stunde.

Ich versichere, die Präsenzübung selbstständig bearbeitet zu haben, und dass mir bekannt ist, dass die Präsenzübung bei einem Täuschungsversuch mit 0 Punkten bewertet wird.

....
(Unterschrift)

Aufgabe	1	2	3	Gesamt
Punkte	20	20	20	60
erreicht				

(Name / Matrikelnummer)

Aufgabe 1. (Maschinenmodelle und Programmiersprachen):

(a) Welche Menge bezeichnet Σ^k über dem Alphabet Σ? **(1 Punkt)**

(b) Was ist eine Sprache? **(1 Punkt)**

(c) Was ist eine Gödelnummerierung? **(1 Punkt)**

(d) Warum kann die Länge einer Eingabe im Allgemeinen nicht in der Zustandsmenge einer Turingmaschine gespeichert werden? **(2 Punkte)**

(e) Wie ist die Zustandsübergangsfunktion δ einer Turingmaschine definiert? Beschreiben Sie insbesondere Definitions- und Bildbereich. **(2 Punkte)**

(f) Vervollständigen Sie die folgende Beschreibung des Verhaltens der angegebenen Turingmaschine M auf nichtleeren Eingaben. Welche Funktion wird von M berechnet?

(6 Punkte)

$$M = \{\{q_0, q_1, q_2, q_3, \bar{q}\}, \{0, 1\}, \{0, 1, B\}, B, q_0, \bar{q}, \delta\}$$

δ	0	1	B
q_0	$(q_0, 0, R)$	$(q_1, 1, R)$	$(\bar{q}, 0, N)$
q_1	$(q_1, 0, R)$	$(q_1, 1, R)$	(q_2, B, L)
q_2	$(q_2, 1, L)$	$(q_3, 0, L)$	$(\bar{q}, 0, N)$
q_3	$(q_3, 0, L)$	$(q_3, 1, L)$	$(\bar{q}, B, R)$

Die Turingmaschine M durchläuft zunächst im Anfangszustand q_0 die Eingabe von links nach rechts. Sobald eine Eins gelesen wird, wechselt M in den Zustand q_1 und läuft weiter bis zum Ende des Eingabewortes. Stehen nur Nullen auf dem Band, so gibt die Turingmaschine 0 aus. Ansonsten. . .

(g) Geben Sie ein WHILE-Programm an, welches x_0 mod 2 berechnet. **(7 Punkte)**

(Name / Matrikelnummer)

Aufgabe 2. (Berechenbarkeit und Unterprogrammtechnik):

(a) Definieren Sie die Sprache H_{all} aus der Vorlesung. **(1 Punkt)**

$$H_{\text{all}} = \{ \qquad\qquad \mid \qquad\qquad\qquad\qquad \}$$

(b) Das 10. Hilbertsche Problem besteht darin, einen Algorithmus zur Entscheidung einer bestimmten Sprache anzugeben. Welche Sprache soll dabei entschieden werden? **(1 Punkt)**

$$N = \{ \qquad\qquad \mid \qquad\qquad\qquad\qquad \}$$

(c) Geben Sie für jede der folgenden Sprachen an, ob sie bzw. ihr Komplement rekursiv oder rekursiv aufzählbar sind. Es ist hier keine Begründung gefordert! **(5 Punkte)**

(1) D

Komplement:

(2) H_ϵ

Komplement:

(3) $\bar{H}$

Komplement:

(4) $\{\langle M \rangle \mid M$ hält auf ϵ nach höchstens 753 Schritten$\}$

Komplement:

(5) Die dem 10. Hilbertschen Problem zugrundeliegende Sprache

Komplement:

(d) Gegeben sei die Sprache $G = \{w \mid w$ ist eine binär kodierte ungerade Zahl$\}$. Beantworten Sie folgende Fragen und begründen Sie Ihre Antworten.

(1) Ist G rekursiv? **(3 Punkte)**

(2) Sei $L_G = \{\langle M \rangle \mid M$ entscheidet $G\}$. Ist L_G rekursiv? **(2 Punkte)**

(Name / Matrikelnummer)

(e) Zeigen Sie durch Unterprogrammtechnik, dass die Sprache $L_{\text{self}} = \{\langle M \rangle | M \text{ hält auf } \langle M \rangle\}$ nicht rekursiv ist. **(8 Punkte)**

(Name / Matrikelnummer)

Aufgabe 3. (Rekursive Aufzählbarkeit und Reduktion):

(a) Seien L_1 und L_2 zwei Sprachen. Definieren Sie $L_1 \leq L_2$. **(2 Punkte)**

(b) Zeigen Sie: Wenn L und $\bar{L}$ rekursiv aufzählbar sind, dann ist L rekursiv. **(5 Punkte)**

(c) Zeigen Sie durch Reduktion $L_{\text{self}} \leq H$, dass L_{self} rekursiv aufzählbar ist. **(5 Punkte)**

(d) Zeigen Sie durch Reduktion $D \leq L_{\text{empty}}$, dass L_{empty} nicht rekursiv aufzählbar ist. Dabei sei L_{empty} die Sprache

$$L_{\text{empty}} = \{\langle M \rangle \mid L(M) = \emptyset\}$$

wobei $L(M)$ die von M erkannte Sprache bezeichnet. **(8 Punkte)**