Datenstrukturen und Algorithmen

Vorlesung 7: Sortieren (K2)

Joost-Pieter Katoen

Lehrstuhl für Informatik 2
Software Modeling and Verification Group

http://www-i2.rwth-aachen.de/i2/dsal10/

7. Mai 2010

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Übersicht

Übersicht

Die Bedeutung des Sortierens

Sortieren ist ein wichtiges Thema

- Sortiert wird häufig benutzt, und hat viele Anwendungen.
- Sortierverfahren geben Ideen, wie man Algorithmen verbessern kann.
- Geniale und optimale Algorithmen wurden gefunden.

- Neben der Funktionsweise der Algorithmen widmen wir uns vor allem der Laufzeitanalyse.

Anwendungen des Sortierens

Beispiel (Suchen)

- Schnellere Suche ist die wohl häufigste Anwendung des Sortierens.
- Binäre Suche findet ein Element in $O(\log n)$.

Beispiel (Engstes Paar (closest pair))

- Gegeben seien n Zahlen. Finde das Paar mit dem geringstem Abstand.
- Nach dem Sortieren liegen die Paare nebeneinander.
  Der Aufwand ist dann noch $O(n)$.

Noch einige Anwendungen

Beispiel (Eigenschaften von Datenobjekten)

- Sind alle n Elemente einzigartig oder gibt es Duplikate?
- Das k-t größte Element einer Menge?

Beispiel (Textkompression (Entropiekodierung))

- Sortiere die Buchstaben nach Häufigkeit des Auftretens um sie dann effizient zu kodieren (d. h. mit möglichst kurzen Bitfolgen).

Einige Hilfsbegriffe

Permutation

Eine Permutation einer Menge $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ ist eine bijektive Abbildung $\pi : A \to A$.

Totale Ordnung

Sei $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ eine Menge. Die binäre Relation $\leqslant \subseteq A \times A$ ist eine totale Ordnung (auf A) wenn für alle $a_i, a_j, a_k \in A$ gilt:

1. Antisymmetrie: $a_i \leqslant a_j$ und $a_j \leqslant a_i$ impliziert $a_i = a_j$.
2. Transitivität: $a_i \leqslant a_j$ und $a_j \leqslant a_k$ impliziert $a_i \leqslant a_k$.
3. Totalität: $a_i \leqslant a_j$ oder $a_j \leqslant a_i$.

Beispiel

Die lexikographische Ordnung von Zeichenketten und die numerische Ordnung von Zahlen sind totale Ordnungen.

Sortierproblem

Das Sortier-Problem

Eingabe:
1. Ein Array `E` mit `n` Einträgen.
2. Die Einträge gehören zu einer Menge A mit totaler Ordnung $\leqslant$.

Ausgabe: Ein Array `F` mit `n` Einträgen, so dass
1. `F[1]`, ..., `F[n]` eine Permutation von `E[1]`, ..., `E[n]` ist
2. Für alle $0 < i, j < n$ gilt: `F[i]` $\leqslant$ `F[i+1]`.

Annahmen dieser Vorlesung

- Die zu sortierende Sequenz ist als Array organisiert, nicht als Liste.
- Die Elementaroperation ist ein Vergleich von Schlüsseln.

Sortieralgorithmen

Beispiel (Einige Sortieralgorithmen)

Insertionsort, Bubblesort, Shellsort, Mergesort, Heapsort
Quicksort, Countingsort, Bucketsort, Radixsort, Stoogesort, usw.

Stabilität

Ein Sortieralgorithmus ist stabil wenn er die Reihenfolge der Elemente, deren Sortierschlüssel gleich sind, bewahrt.

Wenn z. B. eine Liste alphabetisch sortierter Personendateien nach dem Geburtsdatum neu sortiert wird, dann bleiben unter einem stabilen Sortierverfahren alle Personen mit gleichem Geburtsdatum alphabetisch sortiert.

Wir werden erst einen einfachen Sortieralgorithmus betrachten.

Dutch National Flag Problem (I)

Dutch National Flag Problem (II)

Beispiel (Das niederländische Flaggen-Problem [Dijkstra, 1972])

Eingabe:
1. Ein Array `E` mit `n` Einträgen, wobei für alle $0 < i \leqslant n$ `E[i] == rot`, `E[i] == blau` *oder* `E[i] == weiss`
2. Ordnung: `rot` $<$ `weiss` $<$ `blau`

Ausgabe: Ein sortiertes Array mit den Einträgen aus `E`.

Erwünschte Worst-Case Zeitkomplexität: $\Theta(n)$.

Erwünschte Worst-Case Speicherkomplexität: $\Theta(1)$.

Dutch National Flag Problem (III)

Hauptidee

Zerlege das Array `E` in **4 Regionen:**

(1) $0 < i \leqslant$ `r`, (2) `r` $< i <$ `u`, (3) `u` $\leqslant i <$ `b`, **und** (4) `b` $\leqslant i \leqslant$ `n`

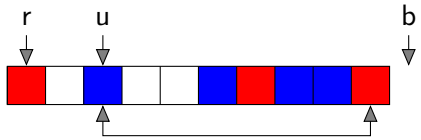
für die Hilfsvariablen `r`, `u` und `b`, so dass folgende Invariante gilt:

1. `E[1], ..., E[r]` **ist die "rote" Region, d. h. für alle** $0 < i \leqslant$ `r` `E[i] == rot`.
2. `E[r+1], ..., E[u-1]` **ist die "weiße" Region, d. h. für alle** `r` $< i <$ `u` `E[i] == weiss`.
3. `E[u], ..., E[b-1]` **ist die unbekannte Region, d. h. für alle** `u` $\leqslant i <$ `b` `E[i] == rot` **oder** `E[i] == weiss` **oder** `E[i] == blau`.
4. `E[b], ..., E[n]` **ist die "blaue" Region, d. h. für alle** `b` $\leqslant i \leqslant$ `n` `E[i] == blau`.

Arrayelemente können mit der `swap`-Operation vertauscht werden.

Dutch National Flag Problem (IV)

```
1  void DutchNationalFlag(Color E[], int n) {
2    int r = 0, b = n + 1; // die rote und blaue Region sind leer
3    int u = 1; // die unbekannte Region == E
4    while (u < b) {
5      if (E[u] == rot) {
6        swap(E[r + 1], E[u]);
7        r = r + 1; // vergrößere die rote Region
8        u = u + 1; // verkleinere die unbekannte Region
9      }
10     if (E[u] == weiss) {
11       u = u + 1;
12     }
13     if (E[u] == blau) {
14       swap(E[b - 1], E[u]);
15       b = b - 1; // vergrößere die blaue Region
16     }
17   }
18 }
```



Frage: Ist der DNF-Algorithmus ein stabiles Sortierverfahren? Antwort: Nein.

Dutch National Flag Problem (V)

Speicherkomplexität

Die Worst-Case Speicherkomplexität vom DNF-Algorithmus ist $\Theta(1)$, da die einzigen extra Variablen `r`, `u` und `b` sind.

DNF ist in-place, d. h. der Algorithmus arbeitet ohne zusätzlichen Speicherplatz.

Zeitkomplexität

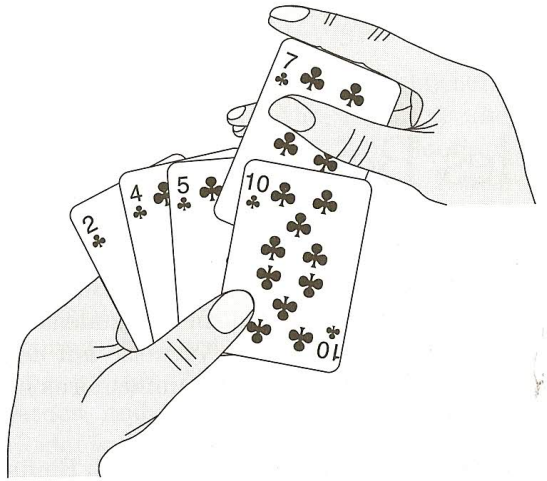
Betrachte als elementare Operation die Vergleiche der Form `E[i] == ...`.

Die Worst-Case Zeitkomplexität ist $\Theta(n)$, da:

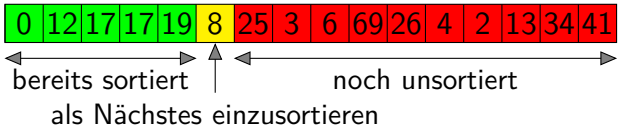
1. in jedem Durchlauf werden eine konstante Anzahl Vergleiche durchgeführt
2. die Anzahl der Durchläufe ist $\Theta(n)$, da in jedem Durchlauf die Größe vom unbekannten Gebiet `b - u` um eins verkleinert wird.

Übersicht

Sortieren durch Einfügen – Insertionsort

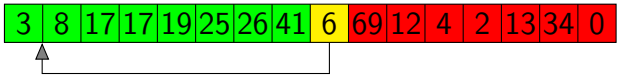


Sortieren durch Einfügen – Insertionsort



- Durchlaufen des (unsortierten) Arrays von links nach rechts.
- Gehe zum ersten bisher noch nicht berücksichtigte Element.
- Füge es im sortierten Teil (links) nach elementweisem Vergleichen ein.
- Dieser Algorithmus funktioniert auch mit anderen lineare Anordnungen, etwa Listen.

Insertionsort – Animation und Algorithmus




```
1 void insertionSort(int E[]) {
2   int i,j;
3   for (i = 1; i < E.length; i++) {
4     int v = E[i]; // speichere E[i]
5     for (j = i; j > 0 && E[j-1] > v; j--) {
6       E[j] = E[j-1]; // schiebe Element j-1 nach rechts
7     }
8     E[j] = v; // füge E[i] an der richtigen Stelle ein
9   }
10 }
```

- Insertionsort ist in-place, d. h. der Algorithmus arbeitet ohne zusätzlichen Speicherplatz.
- Insertionsort ist stabil, da die Reihenfolge der gleichwertigen Arrayelemente unverändert bleibt.

Insertionsort – Best- und Worst-Case-Analyse

Best-Case

- Im Best-Case ist das Array bereits sortiert.
- Pro Element ist daher nur ein Vergleich nötig.

$\Rightarrow$ Es gilt: $B(n) = n - 1 \in \Theta(n)$

Worst-Case

- Im Worst-Case wird das einzusortierende Element immer ganz vorne eingefügt.
- Es musste mit allen vorhergehenden Elementen verglichen werden.
- Das tritt etwa auf, wenn das Array umgekehrt vorsortiert war.

$\Rightarrow$ Zum Einsortieren des i-ten Elements sind im schlimmsten Fall i Vergleiche nötig: $W(n) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n \cdot (n-1)}{2} \in \Theta(n^2)$

Insertionsort – Average-Case-Analyse (I)

Annahmen für die Average-Case-Analyse

- Alle Permutationen von Elementen treten in gleicher Häufigkeit auf.
- Die zu sortierenden Elemente sind alle verschieden.

Es gilt:

$$A(n) = \sum_{i=1}^{n-1} \text{erwartete Anzahl an Vergleichen, um } \texttt{E[i]} \text{ einzusortieren}$$

Die erwartete Anzahl an Vergleichen, um den richtigen Platz für `E[i]` zu finden wird dann wie folgt hergeleitet:

Insertionsort – Average-Case-Analyse (II)

$$\sum_{j=0}^{i} \Pr\left\{\begin{array}{l} i\text{-tes Element wird} \\ \text{an Position } j \text{ eingefügt} \end{array}\right\} \cdot \begin{array}{l} \text{Anzahl Vergleiche, um } \texttt{E[i]} \\ \text{an Position } j \text{ einzufügen} \end{array}$$

| `E[i]` wird an beliebiger Position j mit gleicher W'lichkeit eingefügt

$$= \sum_{j=0}^{i} \frac{1}{i+1} \cdot \begin{array}{l} \text{Anzahl Vergleiche, um } \texttt{E[i]} \\ \text{an Position } j \text{ einzufügen} \end{array}$$

| Anzahl Vergleiche, um an Position 0 oder 1 einzufügen ist i, sonst $i-j+1$.

$$= \frac{1}{i+1} \cdot i + \frac{1}{i+1} \cdot \sum_{j=1}^{i} (i-j+1)$$

| Vereinfachen

$$= \frac{i}{i+1} + \frac{1}{i+1} \cdot \sum_{j=0}^{i} j \;=\; \frac{i}{i+1} + \frac{1}{i+1} \cdot \frac{i \cdot i+1}{2} \;=\; \frac{i}{2} + 1 - \frac{1}{i+1}.$$

Insertionsort – Average-Case-Analyse (III)

Damit gilt für $A(n)$:

$$A(n) = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{i}{2} + 1 - \frac{1}{i+1} \right)$$

| Auseinanderziehen

$$= \frac{n \cdot (n-1)}{4} + (n-1) - \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i}$$

| Verschieben des Summenstarts

$$= \frac{n \cdot (n-1)}{4} + n - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

| Harmonische Reihe: $\sum_{i=1}^{n} (1/i) \approx \ln n$

$$A(n) \approx \frac{n \cdot (n-1)}{4} + n - \ln n \quad \in \Theta(n^2)$$

Übersicht

Divide-and-Conquer

Teile-und-Beherrsche Algorithmen (divide and conquer) teilen das Problem in mehrere Teilprobleme auf, die dem Ausgangsproblem ähneln, jedoch von kleinerer Größe sind.

Sie lösen die Teilprobleme rekursiv und kombinieren diese Lösungen dann, um die Lösung des eigentlichen Problems zu erstellen.

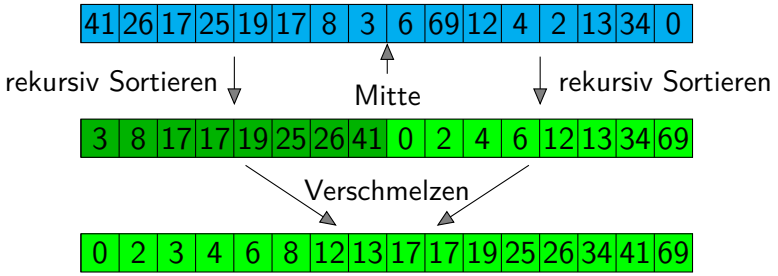
Das Paradigma von Teile-und-Beherrsche umfasst 3 Schritte auf jeder Rekursionsebene:

Teile das Problem in eine Anzahl von Teilproblemen auf.

Beherrsche die Teilprobleme durch rekursives Lösen. Hinreichend kleine Teilprobleme werden direkt gelöst.

Verbinde die Lösungen der Teilprobleme zur Lösung des Ausgangsproblem.

Mergesort – Strategie



Teile das Array in zwei —möglichst gleichgroße— Hälften.

Beherrsche: Sortiere die Teile durch rekursive Mergesort-Aufrufe.

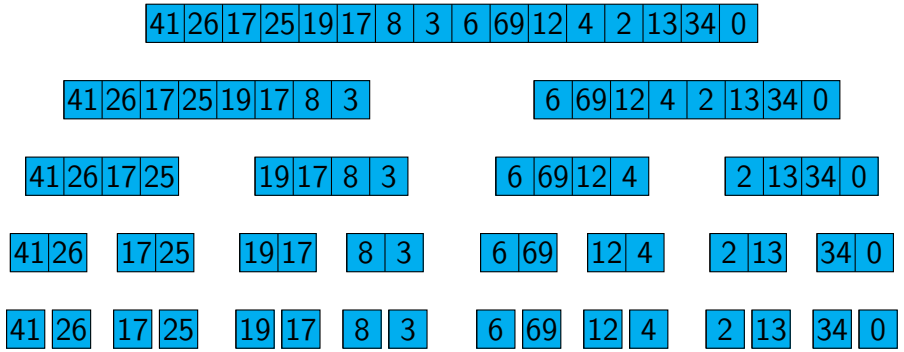
Verbinde: Mische die 2 sortierte Teilsequenzen zu einem einzigen, sortierten Array.

Mergesort – Algorithm

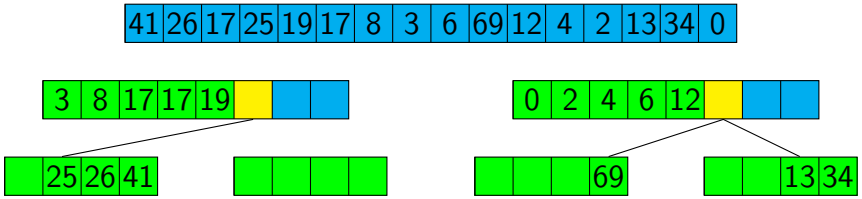
```
1 void mergeSort(int E[], int left, int right) {
2   if (left < right) {
3     int mid = (left + right) / 2; // finde Mitte
4     mergeSort(E, left, mid);      // sortiere linke Hälfte
5     mergeSort(E, mid + 1, right); // sortiere rechte Hälfte
6     // Verschmelzen der sortierten Hälften
7     merge(E, left, mid, right);
8   }
9 }
10 // Aufruf: mergeSort(E, 0, E.length-1);
```

- Verschmelzen kann man in Linearzeit. – Wie?

Mergesort – Animation



Mergesort – Animation



Mergesort – Verschmelzen in Linearzeit

```
1  void merge(int E[], int left, int mid, int right) {
2    int a = left, b = mid + 1;
3    int Eold[] = E;
4    for (; left <= right; left++) {
5      if (a > mid) { // Wir wissen (Widerspruch): b <= right
6        E[left] = Eold[b];
7        b++;
8      } else if (b > right || Eold[a] <= Eold[b]) { // stabil: <=
9        E[left] = Eold[a];
10       a++;
11     } else { // Eold[a] > Eold[b]
12       E[left] = Eold[b];
13       b++;
14     }
15   }
16 }
```

- Mergesort ist stabil (vgl. Zeile 8), d. h. die Reihenfolge von Elementen mit *gleichem* Schlüssel bleibt erhalten.

Mergesort – Analyse

Worst-Case

Wir erhalten:

$$W(n) = W(\lfloor n/2 \rfloor) + W(\lceil n/2 \rceil) + n - 1 \quad \text{mit} \quad W(1) = 0.$$

Mit Hilfe des Mastertheorems ergibt sich: $W(n) \in \Theta(n \cdot \log n)$.

Best-Case, Average-Case

Das Worst-Case-Ergebnis gilt genauso im Best-Case, und damit auch im Average-Case: $W(n) = B(n) = A(n) \in \Theta(n \cdot \log n)$.

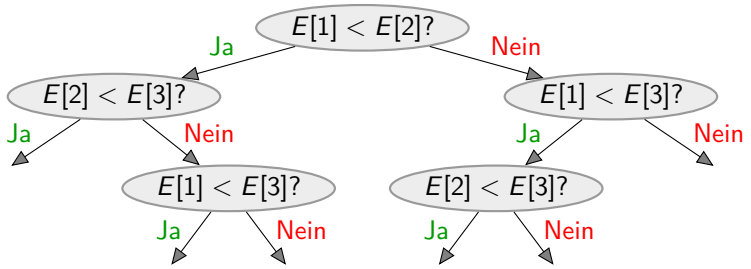
Speicherbedarf

$\Theta(n)$ für die Kopie des Arrays beim Mergen. $\Theta(\log n)$ für den Stack.

- Mergesort ist nicht in-place.
- Mit zusätzlichen Verschiebungen ist die Kopie des Arrays nicht nötig.

Übersicht

Wie effizient kann man sortieren? (I)



Betrachte vergleichsbasierte Sortieralgorithmen als Entscheidungsbaum:

- Dieser beschreibt die Abfolge der durchgeführten Vergleiche.
- Sortieren verschiedener Eingabepermutationen ergibt also verschiedene Pfade im Baum.

Wie effizient kann man sortieren? (II)

Theorem

Vergleichsbasiertes Sortieren benötigt im Worst-Case mindestens $O(n \log n)$ Vergleiche.

Beweis.

Es gilt:

- Anzahl Vergleiche im Worst-Case = Länge des längsten Pfades = Baumhöhe k.
- Da wir binäre Vergleiche verwenden, ergibt sich ein Binärbaum mit $n!$ Blättern.

$\Rightarrow$ Mit $n! \leqslant 2^k$ erhält man $k \geqslant \log(\lceil n! \rceil)$ Vergleiche im Worst-Case.

Da $\log(\lceil n! \rceil) \approx n \cdot \log n - 1.4 \cdot n$ *geht es nicht besser als* $O(n \cdot \log n)$*!* □