Datenstrukturen und Algorithmen

Vorlesung 10: Binäre Suchbäume

Joost-Pieter Katoen

Lehrstuhl für Informatik 2
Software Modeling and Verification Group

http://www-i2.rwth-aachen.de/i2/dsal10/

21. Mai 2010

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Übersicht

Übersicht

Motivation

Suchbäume unterstützen Operationen auf dynamische Mengen, wie:

- Suchen, Einfügen, Löschen, Abfragen (z. B. Nachfolger oder Minimales Element)

Die Basisoperationen auf binäre Suchbäume benötigen eine Laufzeit, die proportional zur Höhe des Baums ist.

Für vollständige binäre Bäume mit n Elemente, liefert dies eine Laufzeit $\Theta(\log n)$ für eine Basisoperation.

Für ein Baum der einer linearen Kette entspricht, dies ist jedoch $\Theta(n)$.

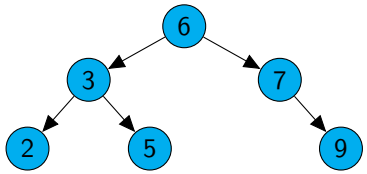
Wir werden später binäre Suchbäume kennen lernen, deren Laufzeit immer $\Theta(\log n)$ ist (s. nächste Vorlesung).

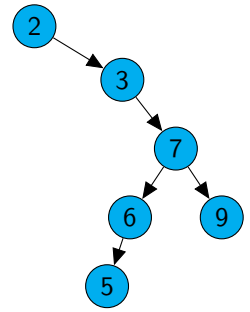
Binäre Suchbäume (I)

Binärer Suchbaum

Ein binärer Suchbaum (BST) ist ein Binärbaum, der Elemente mit Schlüsseln enthält, wobei der Schlüssel jedes Knotens

- mindestens so groß ist, wie jeder Schlüssel im linken Teilbaum und
- höchstens so groß ist, wie jeder Schlüssel im rechten Teilbaum.



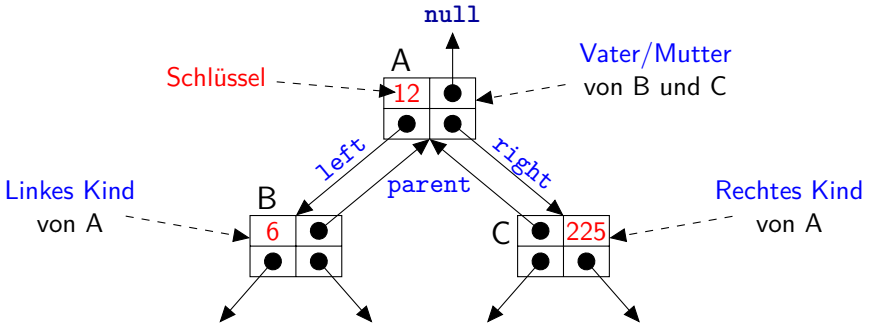


Zwei binäre Suchbäume, die jeweils 2, 3, 5, 6, 7, 9 enthalten.

Binäre Suchbäume (II)

Knoten in einem binären Suchbaum bestehen aus vier Feldern:

- Einem Schlüssel – dem „Wert“ des Knotens,
- einem (möglicherweise leeren) linken und rechten Teilbaum (bzw. Zeiger darauf), sowie
- einem Zeiger auf den Vater-/Mutterknoten (bei der Wurzel leer).



Binäre Suchbäume (III)

Beispiel (Binärer Suchbaum in C/C++)

```
1  typedef struct _node* Node;
2  struct _node {
3    int key;
4    Node left, right;
5    Node parent;
6    // ... evtl. eigene Datenfelder
7  };

9  struct _tree {
10   Node root;
11 };
12 typedef struct _tree* Tree;
```


Sortieren in linearer Zeit?

Sortieren

Eine Inorder Traveriserung eines binären Suchbaumes gibt alle Schlüssel im Suchbaum in sortierter Reihenfolge aus.

Die Korrektheit dieses Sortierverfahrens folgt per Induktion direkt aus der BST-Eigenschaft.

Beispiel

Beispiel Inorder Traversierung BST am Overheadprojektor.

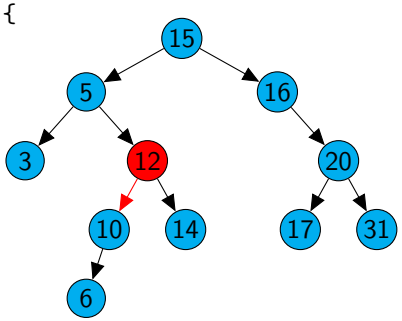
Zeitkomplexität

Da die Zeitkomplexität einer Inorder Traversierung eines Baumes mit n Knoten $\Theta(n)$ ist, liefert uns dies einen Sortieralgorithmus in $\Theta(n)$.

Dies setzt jedoch voraus, dass alle Daten als ein BST gespeichert sind.

Suche nach Schlüssel k im BST – $k = 10$

```
1  Node bstSearch(Node root, int k) {
2    while (root) {
3      if (k < root.key) {
4        root = root.left;
5      } else if (k > root.key) {
6        root = root.right;
7      } else { // k == root.key
8        return root;
9      }
10   }
11   return null; // nicht gefunden
12 }
```



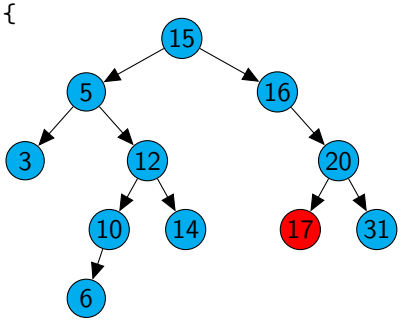
Die Worst-Case Komplexität ist linear in der Höhe h des Baumes: $\Theta(h)$.

- Für einen kettenartigen Baum mit n Knoten ergibt das $\Theta(n)$.
- Ist der BST so balanciert wie möglich, erhält man $\Theta(\log n)$.

Funktioniert dieses Suchverfahren auch bei Heaps? Nein.

Suche nach Schlüssel k im BST – $k = 18$ (erfolglos)

```
1  Node bstSearch(Node root, int k) {
2    while (root) {
3      if (k < root.key) {
4        root = root.left;
5      } else if (k > root.key) {
6        root = root.right;
7      } else { // k == root.key
8        return root;
9      }
10   }
11   return null; // nicht gefunden
12 }
```



Die Worst-Case Komplexität ist linear in der Höhe h des Baumes: $\Theta(h)$.

- Für einen kettenartigen Baum mit n Knoten ergibt das $\Theta(n)$.
- Ist der BST so balanciert wie möglich, erhält man $\Theta(\log n)$.

Funktioniert dieses Suchverfahren auch bei Heaps? Nein.

Einfügen eines Knotens mit Schlüssel k – Strategie

Einfügen

Man kann einen neuen Knoten mit Schlüssel k in den BST t einfügen, ohne die BST-Eigenschaft zu zerstören:

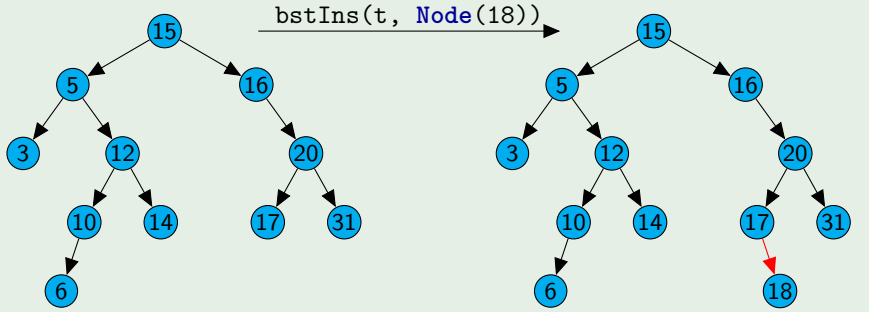
Suche einen geeigneten, freien Platz:
Wie bei der regulären Suche, außer dass, selbst bei gefundenem Schlüssel, weiter abgestiegen wird, bis ein Knoten ohne entsprechendes Kind erreicht ist.

Hänge den neuen Knoten an:
Verbinde den neuen Knoten mit dem gefundenen Vaterknoten.

- Komplexität: $\Theta(h)$, wegen der Suche.

Einfügen von 18 in den BST t – Beispiel

Beispiel



Einfügen in einen BST – Algorithmus

```
1 void bstIns(Tree t, Node node) { // Füge node in den Baum t ein
2   // Suche freien Platz
3   Node root = t.root, parent = null;
4   while (root) {
5     parent = root;
6     if (node.key < root.key) {
7       root = root.left;
8     } else {
9       root = root.right;
10    }
11  } // Einfügen
12  node.parent = parent;
13  if (!parent) { // t war leer => neue Wurzel
14    t.root = node;
15  } else if (node.key < parent.key) { // richtige Seite ...
16    parent.left = node;
17  } else {
18    parent.right = node;
19  }
20 }
```

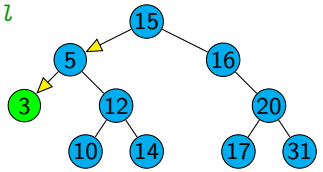

Abfragen im BST: Minimum

Problem

Wir suchen den Knoten mit kleinstem Schlüssel im durch `root` gegebenen (Teil-)Baum.

Lösung

```
1 Node bstMin(Node root) { // root != null
2   while (root.left) {
3     root = root.left;
4   }
5   return root;
6 }
```



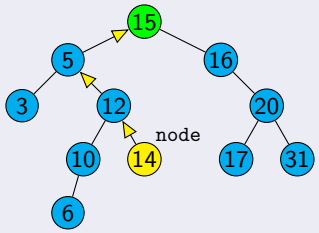
- Komplexität: $\Theta(h)$ bei Baumhöhe h.
- Analog kann das Maximum gefunden werden.

Abfragen im BST: Nachfolger (I)

Problem

Wir suchen den Nachfolger-Knoten von `node`, also den bei Inorder-Traversierung als nächstes zu besuchenden Knoten. Dessen Schlüssel ist mindestens so groß wie `node.key`.

Lösung

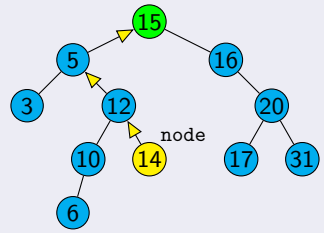


Abfragen im BST: Nachfolger (I)

Problem

Wir suchen den Nachfolger-Knoten von `node`, also den bei Inorder-Traversierung als nächstes zu besuchenden Knoten. Dessen Schlüssel ist mindestens so groß wie `node.key`.

Lösung



Abfragen im BST: Nachfolger (I)

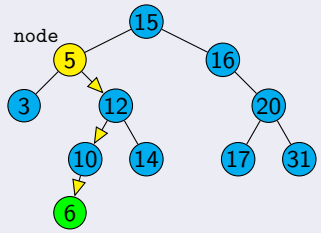
Problem

Wir suchen den Nachfolger-Knoten von `node`, also den bei Inorder-Traversierung als nächstes zu besuchenden Knoten. Dessen Schlüssel ist mindestens so groß wie `node.key`.

Lösung

Der rechte Teilbaum existiert:

Der Nachfolger ist der kleinste Knoten im rechten Teilbaum.



Binäre Suchbäume Binäre Suchbäume

Abfragen im BST: Nachfolger (I)

Problem

Wir suchen den Nachfolger-Knoten von `node`, also den bei Inorder-Traversierung als nächstes zu besuchenden Knoten. Dessen Schlüssel ist mindestens so groß wie `node.key`.

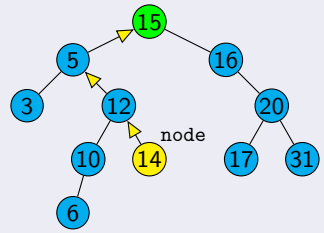
Lösung

Der rechte Teilbaum existiert:

Der Nachfolger ist der kleinste Knoten im rechten Teilbaum.

Andernfalls:

Der Nachfolger ist der jüngste Vorfahre, dessen linker Teilbaum `node` enthält.



Binäre Suchbäume Binäre Suchbäume

Abfragen im BST: Nachfolger (I)

Problem

Wir suchen den Nachfolger-Knoten von `node`, also den bei Inorder-Traversierung als nächstes zu besuchenden Knoten. Dessen Schlüssel ist mindestens so groß wie `node.key`.

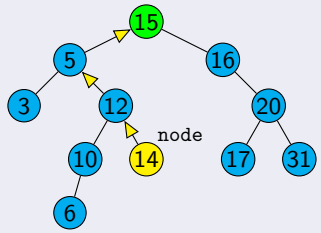
Lösung

Der rechte Teilbaum existiert:

Der Nachfolger ist der kleinste Knoten im rechten Teilbaum.

Andernfalls:

Der Nachfolger ist der jüngste Vorfahre, dessen linker Teilbaum `node` enthält.



- Komplexität: $\Theta(h)$ bei Baumhöhe h.

Binäre Suchbäume Binäre Suchbäume

Abfragen im BST: Nachfolger (I)

Problem

Wir suchen den Nachfolger-Knoten von `node`, also den bei Inorder-Traversierung als nächstes zu besuchenden Knoten. Dessen Schlüssel ist mindestens so groß wie `node.key`.

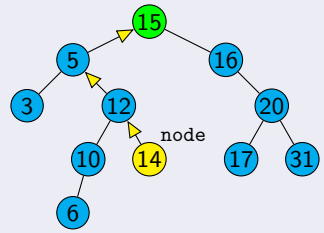
Lösung

Der rechte Teilbaum existiert:

Der Nachfolger ist der kleinste Knoten im rechten Teilbaum.

Andernfalls:

Der Nachfolger ist der jüngste Vorfahre, dessen linker Teilbaum `node` enthält.



- Komplexität: $\Theta(h)$ bei Baumhöhe h.
- Analog kann der Vorgänger gefunden werden.

Abfragen im BST: Nachfolger (II)

Der rechte Teilbaum existiert:
Der Nachfolger ist der kleinste Knoten im rechten Teilbaum.

Andernfalls:
Der Nachfolger ist der jüngste Vorfahre, dessen linker Teilbaum `node` enthält.

```
1  Node bstSucc(Node node) { // node != null
2    if (node.right) {
3      return bstMin(node.right);
4    }
5    // Abbruch, wenn node nicht mehr rechtes Kind ist (also linkes!)
6    // oder node.parent leer ist (also kein Nachfolger existiert).
7    while (node.parent && node.parent.right == node) {
8      node = node.parent;
9    }
10   return node.parent;
11 }
```


Ersetzen von Knoten im BST

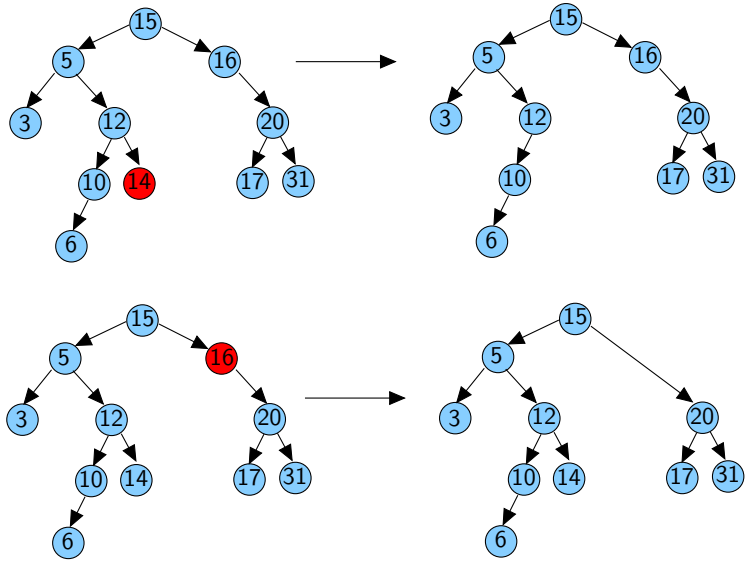
```
1  // Ersetzt old im Baum t durch node (ohne Sortierung!)
2  void bstReplace(Tree t, Node old, Node node) {
3    // node == null nur erlaubt, wenn old keine Kinder hatte
4    if (node) {
5      // übernimm linken Teilbaum
6      node.left = old.left;
7      if (node.left) {
8        node.left.parent = node;
9      }
10
11     // rechten Teilbaum
12     node.right = old.right;
13     if (node.right) {
14       node.right.parent = node;
15     }
16   }
17
```

→

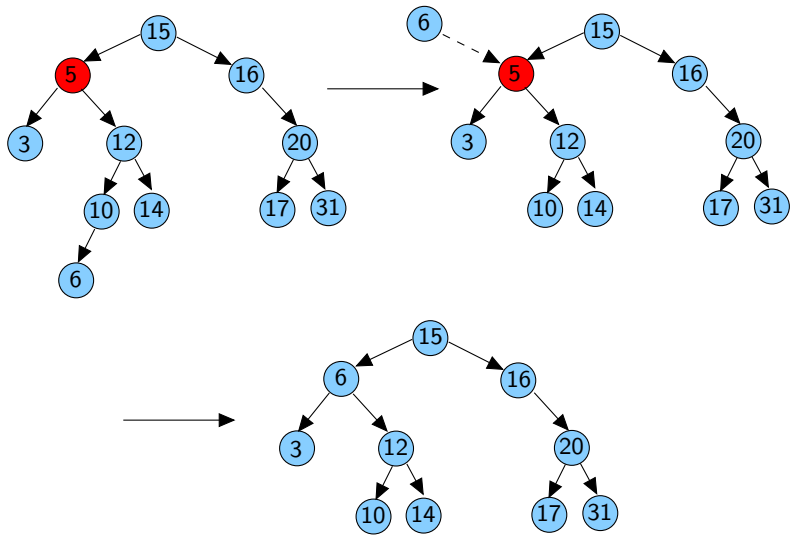
```
18   // füge den Knoten ein
19   node.parent = old.parent;
20   if (!old.parent) {
21     // war die Wurzel
22     t.root = node;
23   } else if
24     (old == old.parent.left) {
25     // war linkes Kind
26     node.parent.left = node;
27   } else { // rechtes Kind
28     node.parent.right = node;
29   }
30 }
```

Das Ersetzen eines Knotens hat die Zeitkomplexität $O(1)$

Löschen im BST: Die beiden einfachen Fälle



Löschen im BST: Der aufwändigere Fall



Löschen im BST – Strategie

Löschen

Um Knoten `node` aus dem BST zu löschen, verfahren wir folgendermaßen:

`node` hat keine Kinder:
Ersetze im Vaterknoten von `node` den Zeiger auf `node` durch `null`.

`node` hat ein Kind:
Wir schneiden `node` aus, indem wir den Vater und das Kind direkt miteinander verbinden.

`node` hat zwei Kinder:
Wir finden den Nachfolger von `node`, entfernen ihn aus seiner ursprünglichen Position und ersetzen `node` durch den Nachfolger.

- Es tritt nur der erste Fall (`bstMin(node.right)`) aus `bstSucc` auf.
- Der gesuchte Nachfolger hat kein linkes Kind.

Löschen im BST – Algorithmus

```
1 // Entfernt node aus dem Baum.
2 // Danach kann node ggf. auch aus dem Speicher entfernt werden.
3 void bstDel(Tree t, Node node) {
4   if (node.left && node.right) { // zwei Kinder
5     Node tmp = bstMin(node.right);
6     bstDel(t, tmp); // höchstens ein Kind, rechts
7     bstReplace(t, node, tmp);
8   } else if (node.left) { // ein Kind, links
9     bstReplace(t, node, node.left);
10  } else { // ein Kind, oder kein Kind (node.right == null)
11    bstReplace(t, node, node.right);
12  }
13 }
```


Komplexität der Operationen auf BSTs

Operation	Zeit
`bstSearch`	$\Theta(h)$
`bstSucc`	$\Theta(h)$
`bstMin`	$\Theta(h)$
`bstIns`	$\Theta(h)$
`bstDel`	$\Theta(h)$

- Alle Operationen sind linear in der Höhe h des BSTs.
- Die Höhe ist $\log n$, wenn der Baum nicht zu „unbalanciert“ ist.
- Man kann einen binären Baum mittels Rotationen wieder balancieren.

Zufällig erzeugte binäre Suchbäume

Zufällig erzeugte BST

Ein zufällig erzeugter BST mit n Elementen ist ein BST, der durch das Einfügen von n (unterschiedliche) Schlüssel in zufälliger Reihenfolge in einem anfangs leeren Baum entsteht.

Annahme: jede der $n!$ möglichen Einfügungsordnungen hat die gleiche Wahrscheinlichkeit.

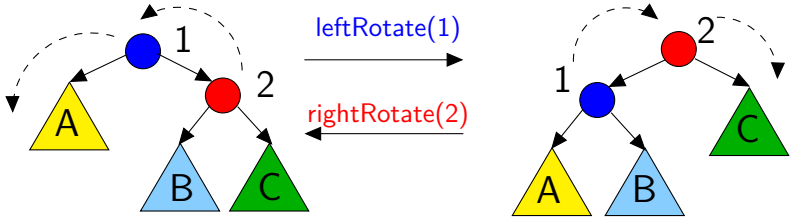
Theorem (ohne Beweis)

Die erwartete Höhe eines zufällig erzeugten BSTs mit n Elementen ist $O(\log n)$.

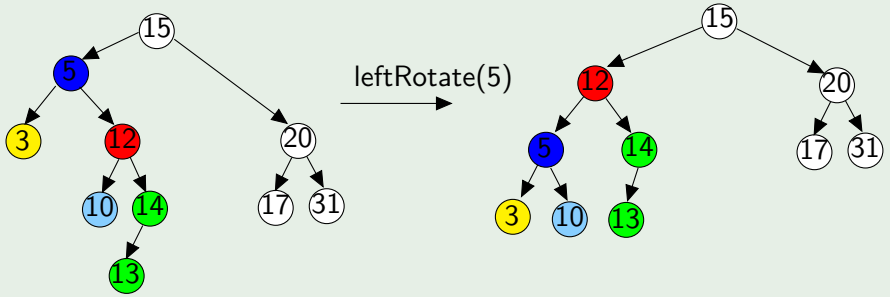
Fazit: Im Schnitt verhält sich eine binäre Suchbaum wie ein (fast) balancierte Suchbaum.

Übersicht

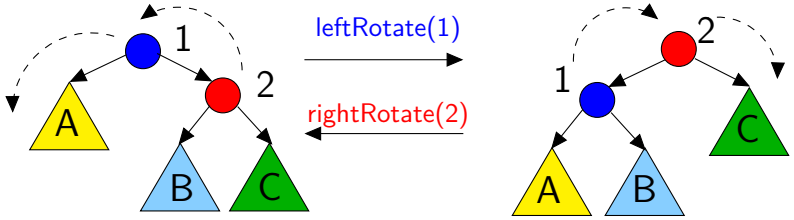
leftRotate – Konzept und Beispiel



Beispiel



Rotationen: Eigenschaften und Komplexität



Lemma

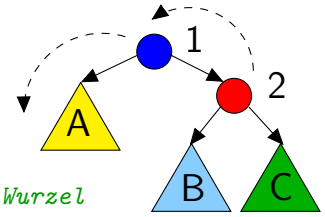
- Ein rotierter BST ist ein BST
- Die Inorder-Traversierung beider Bäume bleibt unverändert.

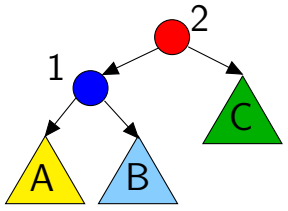
Zeitkomplexität

Die Zeitkomplexität von Links- oder Rechtsrotieren ist in $\Theta(1)$.

leftRotate – Algorithmus

```
1  void leftRotate(Tree t, Node node1) { // analog: rightRotate()
2    Node node2 = node1.right;
3    // Baum B verschieben
4    node1.right = node2.left;
5    node1.right.parent = node1;
6
7    // node2 wieder einhängen
8    node2.parent = node1.parent;
9    if (!node1.parent) { // node1 war die Wurzel
10     t.root = node2;
11   } else if (node1 == node1.parent.left) { // war linkes Kind
12     node2.parent.left = node2;
13   } else { // war rechtes Kind
14     node2.parent.right = node2;
15   }
16
17   // node1 einhängen
18   node2.left = node1;
19   node1.parent = node2;
20 }
```





Rotationen – AVL-Baum

Bleibt die Frage, an welchen Knoten die Rotationen durchgeführt werden muss.

AVL-Baum

- Bei AVL-Bäumen wird die Höhe der Teilbäume der Knoten balanciert.
- Dazu wird (in einem zusätzlichem Datenfeld) an jedem Knoten über die Höhe dieses Unterbaums Buch geführt.
- Nach jeder (kritischen) Operation wird die Balance wiederhergestellt. Dies ist in $\Theta(h)$ möglich!
- Dadurch bleibt stets $h = \Theta(\log n)$ und $\Theta(\log n)$ kann für die Operationen auf dem BST garantiert werden.

- Eine andere Möglichkeit, um Bäume zu balancieren sind Rot-Schwarz-Bäume (nächste Vorlesung am 4. Juni).