Datenstrukturen und Algorithmen

Vorlesung 13: Hashing II

Joost-Pieter Katoen

Lehrstuhl für Informatik 2
Software Modeling and Verification Group

http://www-i2.rwth-aachen.de/i2/dsal10/

11. Juni 2010

Übersicht

1. Offene Adressierung
   - Lineares Sondieren
   - Quadratisches Sondieren
   - Doppeltes Hashing
   - Effizienz der offenen Adressierung

Übersicht

Kollisionsauflösung durch offene Adressierung

- Alle Elemente werden direkt in der Hashtabelle gespeichert (im Gegensatz zur Verkettung).

Kollisionsauflösung durch offene Adressierung

- Alle Elemente werden direkt in der Hashtabelle gespeichert (im Gegensatz zur Verkettung).

$\Rightarrow$ Höchstens n Schlüssel können gespeichert werden, d. h. $\alpha(n, m) = \frac{n}{m} \leqslant 1$. [Amdahl 1954]

Kollisionsauflösung durch offene Adressierung

- Alle Elemente werden direkt in der Hashtabelle gespeichert (im Gegensatz zur Verkettung).

$\Rightarrow$ Höchstens n Schlüssel können gespeichert werden, d. h. $\alpha(n, m) = \frac{n}{m} \leqslant 1$. [Amdahl 1954]

- Man spart aber den Platz für die Pointer.

Kollisionsauflösung durch offene Adressierung

- Alle Elemente werden direkt in der Hashtabelle gespeichert (im Gegensatz zur Verkettung).

⇒ Höchstens n Schlüssel können gespeichert werden, d. h. $\alpha(n, m) = \frac{n}{m} \leqslant 1$. [Amdahl 1954]

- Man spart aber den Platz für die Pointer.

Einfügen von Schlüssel k

- Sondiere (to probe) die Positionen der Hashtabelle, bis ein leerer Slot gefunden wurde.

Kollisionsauflösung durch offene Adressierung

- Alle Elemente werden direkt in der Hashtabelle gespeichert (im Gegensatz zur Verkettung).

$\Rightarrow$ Höchstens n Schlüssel können gespeichert werden, d. h. $\alpha(n, m) = \frac{n}{m} \leqslant 1$. [Amdahl 1954]

- Man spart aber den Platz für die Pointer.

Einfügen von Schlüssel k

- Sondiere (to probe) die Positionen der Hashtabelle, bis ein leerer Slot gefunden wurde.
- Die zu überprüfenden Positionen sind vom einzufügenden Schlüssel k abgeleitet.

Kollisionsauflösung durch offene Adressierung

- Alle Elemente werden direkt in der Hashtabelle gespeichert (im Gegensatz zur Verkettung).

$\Rightarrow$ Höchstens n Schlüssel können gespeichert werden, d. h. $\alpha(n, m) = \frac{n}{m} \leqslant 1$. [Amdahl 1954]

- Man spart aber den Platz für die Pointer.

Einfügen von Schlüssel k

- Sondiere (to probe) die Positionen der Hashtabelle, bis ein leerer Slot gefunden wurde.
- Die zu überprüfenden Positionen sind vom einzufügenden Schlüssel k abgeleitet.
- Die Hashfunktion hängt also vom Schlüssel k und der Nummer der Sondierung ab:

$$h : U \times \{ 0, 1, \ldots m-1 \} \longrightarrow \{ 0, 1, \ldots m-1 \}$$

Einfügen bei offener Adressierung

```
void hashInsert(int T[], int key) {
  for (int i = 0; i < T.length; i++) { // Teste ganze Tabelle
    int pos = h(key, i); // Berechne i-te Sondierung
    if (!T[pos]) { // freier Platz
      T[pos] = key;
      return; // fertig
    }
  }
  throw "Überlauf der Hashtabelle";
}
```

Suche bei offener Adressierung

```
int hashSearch(int T[], int key) {
  for (int i = 0; i < T.length; i++) {
    int pos = h(key, i); // Berechne i-te Sondierung
    if (T[pos] == key) { // Schlüssel k gefunden
      return T[pos];
    } else if (!T[pos]) { // freier Platz, nicht gefunden
      break;
    }
  }
  return -1; // "nicht gefunden"
}
```

Löschen bei offener Adressierung

Löschen bei offener Adressierung

Problem

Löschen des Schlüssels k aus Slot `i` *durch* `T[i] = null` *ist ungeeignet:*

Löschen bei offener Adressierung

Problem

Löschen des Schlüssels k aus Slot `i` *durch* `T[i] = null` *ist ungeeignet:*

- *Wenn beim Einfügen von k der Slot* `i` *besetzt war, können wir k nicht mehr abrufen.*

Löschen bei offener Adressierung

Problem

Löschen des Schlüssels k aus Slot `i` *durch* `T[i] = null` *ist ungeeignet:*

- *Wenn beim Einfügen von k der Slot* `i` *besetzt war, können wir k nicht mehr abrufen.*

Lösung

Markiere `T[i]` *mit dem speziellen Wert* `DELETED` *(oder: „veraltet“).*

Löschen bei offener Adressierung

Problem

Löschen des Schlüssels k aus Slot `i` *durch* `T[i] = null` *ist ungeeignet:*

- *Wenn beim Einfügen von k der Slot* `i` *besetzt war, können wir k nicht mehr abrufen.*

Lösung

Markiere `T[i]` *mit dem speziellen Wert* `DELETED` *(oder: „veraltet“).*

- `hashInsert` *muss angepasst werden und solche Slots als leer betrachten.*

Löschen bei offener Adressierung

Problem

Löschen des Schlüssels k aus Slot `i` *durch* `T[i] = null` *ist ungeeignet:*

- *Wenn beim Einfügen von k der Slot* `i` *besetzt war, können wir k nicht mehr abrufen.*

Lösung

Markiere `T[i]` *mit dem speziellen Wert* `DELETED` *(oder: „veraltet“).*

- `hashInsert` *muss angepasst werden und solche Slots als leer betrachten.*
- `hashSearch` *bleibt unverändert, solche Slots werden einfach übergangen.*

Löschen bei offener Adressierung

Problem

Löschen des Schlüssels k aus Slot `i` *durch* `T[i] = null` *ist ungeeignet:*

- *Wenn beim Einfügen von k der Slot* `i` *besetzt war, können wir k nicht mehr abrufen.*

Lösung

Markiere `T[i]` *mit dem speziellen Wert* `DELETED` *(oder: „veraltet“).*

- `hashInsert` *muss angepasst werden und solche Slots als leer betrachten.*
- `hashSearch` *bleibt unverändert, solche Slots werden einfach übergangen.*

- Die Suchzeiten sind nun nicht mehr allein vom Füllgrad α abhängig.

Löschen bei offener Adressierung

Problem

Löschen des Schlüssels k aus Slot `i` *durch* `T[i] = null` *ist ungeeignet:*

- *Wenn beim Einfügen von k der Slot* `i` *besetzt war, können wir k nicht mehr abrufen.*

Lösung

Markiere `T[i]` *mit dem speziellen Wert* `DELETED` *(oder: „veraltet“).*

- `hashInsert` *muss angepasst werden und solche Slots als leer betrachten.*
- `hashSearch` *bleibt unverändert, solche Slots werden einfach übergangen.*

- Die Suchzeiten sind nun nicht mehr allein vom Füllgrad α abhängig.

$\Rightarrow$ Wenn Schlüssel gelöscht werden sollen wird häufiger Verkettung verwendet.

Wie wählt man die nächste Sondierung?

Wie wählt man die nächste Sondierung?

Wir benötigen eine Sondierungssequenz für einen gegebenen Schlüssel k:

$$\langle h(k,0), h(k,1), \ldots, h(k,m{-}1) \rangle$$

Wie wählt man die nächste Sondierung?

Wir benötigen eine Sondierungssequenz für einen gegebenen Schlüssel k:

$$\langle h(k, 0), h(k, 1), \ldots, h(k, m-1) \rangle$$

- Wenn es sich dabei um eine Permutation von $\langle 0, \ldots m-1 \rangle$ handelt ist garantiert, dass jeder Slot letztlich geprüft wird.

Wie wählt man die nächste Sondierung?

Wir benötigen eine Sondierungssequenz für einen gegebenen Schlüssel k:

$$\langle h(k,0), h(k,1), \ldots, h(k,m-1) \rangle$$

- Wenn es sich dabei um eine Permutation von $\langle 0, \ldots m-1 \rangle$ handelt ist garantiert, dass jeder Slot letztlich geprüft wird.
- Gleichverteiltes Hashing wäre ideal, d. h. jede der $m!$ Permutationen ist als Sondierungssequenz gleich wahrscheinlich.

Wie wählt man die nächste Sondierung?

Wir benötigen eine Sondierungssequenz für einen gegebenen Schlüssel k:

$$\langle h(k,0), h(k,1), \ldots, h(k,m-1) \rangle$$

- Wenn es sich dabei um eine Permutation von $\langle 0, \ldots m-1 \rangle$ handelt ist garantiert, dass jeder Slot letztlich geprüft wird.
- Gleichverteiltes Hashing wäre ideal, d. h. jede der $m!$ Permutationen ist als Sondierungssequenz gleich wahrscheinlich.
- In der Praxis ist das aber zu aufwändig und wird approximiert.

Wie wählt man die nächste Sondierung?

Wir benötigen eine Sondierungssequenz für einen gegebenen Schlüssel k:

$$\langle h(k,0), h(k,1), \ldots, h(k,m-1) \rangle$$

- Wenn es sich dabei um eine Permutation von $\langle 0, \ldots m-1 \rangle$ handelt ist garantiert, dass jeder Slot letztlich geprüft wird.
- Gleichverteiltes Hashing wäre ideal, d. h. jede der $m!$ Permutationen ist als Sondierungssequenz gleich wahrscheinlich.
- In der Praxis ist das aber zu aufwändig und wird approximiert.

Sondierungsverfahren

Wie wählt man die nächste Sondierung?

Wir benötigen eine Sondierungssequenz für einen gegebenen Schlüssel k:

$$\langle h(k,0), h(k,1), \ldots, h(k,m{-}1)\rangle$$

- Wenn es sich dabei um eine Permutation von $\langle 0, \ldots m-1\rangle$ handelt ist garantiert, dass jeder Slot letztlich geprüft wird.
- Gleichverteiltes Hashing wäre ideal, d. h. jede der $m!$ Permutationen ist als Sondierungssequenz gleich wahrscheinlich.
- In der Praxis ist das aber zu aufwändig und wird approximiert.

Sondierungsverfahren

- Wir behandeln Lineares Sondieren, Quadratisches Sondieren und Doppeltes Hashing.

Wie wählt man die nächste Sondierung?

Wir benötigen eine Sondierungssequenz für einen gegebenen Schlüssel k:

$$\langle h(k, 0), h(k, 1), \ldots, h(k, m{-}1) \rangle$$

- Wenn es sich dabei um eine Permutation von $\langle 0, \ldots m-1 \rangle$ handelt ist garantiert, dass jeder Slot letztlich geprüft wird.
- Gleichverteiltes Hashing wäre ideal, d. h. jede der $m!$ Permutationen ist als Sondierungssequenz gleich wahrscheinlich.
- In der Praxis ist das aber zu aufwändig und wird approximiert.

Sondierungsverfahren

- Wir behandeln Lineares Sondieren, Quadratisches Sondieren und Doppeltes Hashing.
- Die Qualität ist durch die Anzahl der verschiedenen Sondierungssequenzen, die jeweils erzeugt werden, bestimmt.

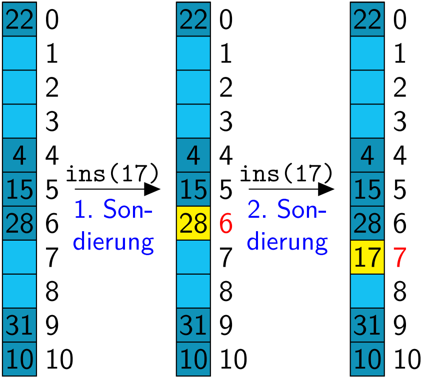
Lineares Sondieren

Hashfunktion beim linearen Sondieren

$h(k, i) = (h'(k) + i) \textbf{ mod } m$ (für $i < m$).

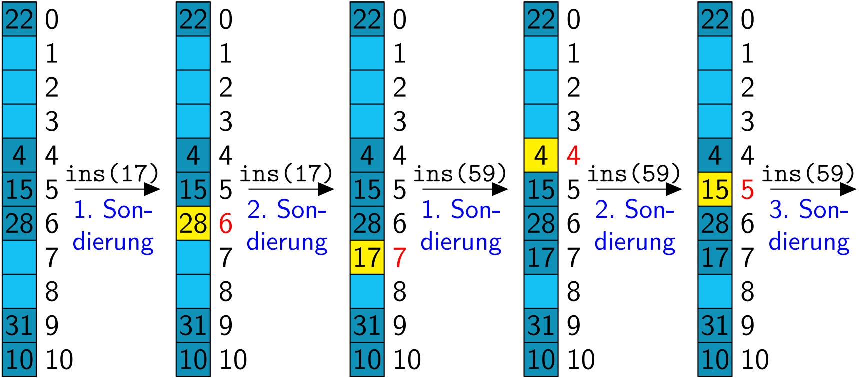
- k ist der Schlüssel
- i ist der Index im Sondierungssequenz
- h' ist eine übliche Hashfunktion.

Lineares Sondieren: Beispiel



$\boxed{h'(k) = k \textbf{ mod } 11}$ $\boxed{h(k,i) = (h'(k)+i) \textbf{ mod } 11}$

Lineares Sondieren: Beispiel



$$\boxed{h'(k) = k \textbf{ mod } 11}$$

$$\boxed{h(k, i) = (h'(k) + i) \textbf{ mod } 11}$$

Lineares Sondieren

Hashfunktion beim linearen Sondieren

$h(k, i) = (h'(k) + i) \textbf{ mod } m$ (für $i < m$).

- h' ist eine übliche Hashfunktion.

Lineares Sondieren

Hashfunktion beim linearen Sondieren

$h(k, i) = (h'(k) + i) \textbf{ mod } m$ (für $i < m$).

- h' ist eine übliche Hashfunktion.

- Die Verschiebung der nachfolgende Sondierungen ist linear von i abhängig.

Lineares Sondieren

Hashfunktion beim linearen Sondieren

$h(k, i) = (h'(k) + i) \textbf{ mod } m$ (für $i < m$).

- h' ist eine übliche Hashfunktion.

- Die Verschiebung der nachfolgende Sondierungen ist linear von i abhängig.
- Die erste Sondierung bestimmt bereits die gesamte Sequenz.

Lineares Sondieren

Hashfunktion beim linearen Sondieren

$h(k, i) = (h'(k) + i) \textbf{ mod } m$ (für $i < m$).

- h' ist eine übliche Hashfunktion.

- Die Verschiebung der nachfolgende Sondierungen ist linear von i abhängig.
- Die erste Sondierung bestimmt bereits die gesamte Sequenz.

$\Rightarrow$ m verschiedene Sequenzen können erzeugt werden.

Lineares Sondieren

Hashfunktion beim linearen Sondieren

$h(k, i) = (h'(k) + i) \textbf{ mod } m$ (für $i < m$).

- h' ist eine übliche Hashfunktion.

- Die Verschiebung der nachfolgende Sondierungen ist linear von i abhängig.
- Die erste Sondierung bestimmt bereits die gesamte Sequenz.

$\Rightarrow$ m verschiedene Sequenzen können erzeugt werden.

- Clustering, also lange Folgen von belegten Slots, führt zu Problemen:

Lineares Sondieren

Hashfunktion beim linearen Sondieren

$h(k, i) = (h'(k) + i) \textbf{ mod } m$ (für $i < m$).

- h' ist eine übliche Hashfunktion.

- Die Verschiebung der nachfolgende Sondierungen ist linear von i abhängig.
- Die erste Sondierung bestimmt bereits die gesamte Sequenz.

$\Rightarrow$ m verschiedene Sequenzen können erzeugt werden.

- Clustering, also lange Folgen von belegten Slots, führt zu Problemen:
  - $h'(k)$ bleibt konstant, aber der Offset wird jedes Mal um eins größer.

Lineares Sondieren

Hashfunktion beim linearen Sondieren

$h(k, i) = (h'(k) + i) \textbf{ mod } m$ (für $i < m$).

- h' ist eine übliche Hashfunktion.

- Die Verschiebung der nachfolgende Sondierungen ist linear von i abhängig.
- Die erste Sondierung bestimmt bereits die gesamte Sequenz.

$\Rightarrow$ m verschiedene Sequenzen können erzeugt werden.

- Clustering, also lange Folgen von belegten Slots, führt zu Problemen:
  - $h'(k)$ bleibt konstant, aber der Offset wird jedes Mal um eins größer.
  - Ein leerer Slot, dem i volle Slots vorausgehen, wird als nächstes mit Wahrscheinlichkeit $\frac{i+1}{m}$ gefüllt.

Lineares Sondieren

Hashfunktion beim linearen Sondieren

$h(k, i) = (h'(k) + i) \ \mathbf{mod} \ m$ (für $i < m$).

- h' ist eine übliche Hashfunktion.

- Die Verschiebung der nachfolgende Sondierungen ist linear von i abhängig.
- Die erste Sondierung bestimmt bereits die gesamte Sequenz.

$\Rightarrow$ m verschiedene Sequenzen können erzeugt werden.

- Clustering, also lange Folgen von belegten Slots, führt zu Problemen:
  - $h'(k)$ bleibt konstant, aber der Offset wird jedes Mal um eins größer.
  - Ein leerer Slot, dem i volle Slots vorausgehen, wird als nächstes mit Wahrscheinlichkeit $\frac{i+1}{m}$ gefüllt.

  $\Rightarrow$ Lange Folgen tendieren dazu länger zu werden.

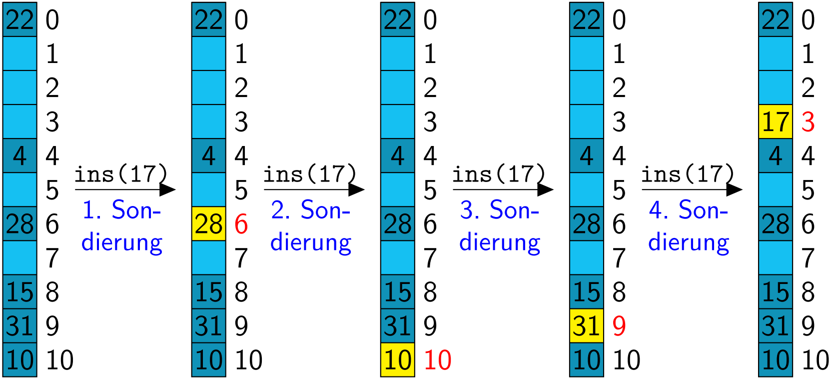
Quadratisches Sondieren

Hashfunktion beim quadratischen Sondieren

$h(k, i) = (h'(k) + c_1 \cdot i + c_2 \cdot i^2)$ **mod** m (für $i < m$).

- k ist der Schlüssel
- i ist der Index im Sondierungssequenz
- h' ist eine übliche Hashfunktion, und
- c_1, $c_2 \neq 0$ Konstanten.

Quadratisches Sondieren: Beispiel



$$\boxed{h'(k) = k \textbf{ mod } 11}$$

$$\boxed{h(k,i) = (h'(k) + i + 3i^2) \textbf{ mod } 11}$$

Quadratisches Sondieren

Hashfunktion beim quadratischen Sondieren

$h(k, i) = (h'(k) + c_1 \cdot i + c_2 \cdot i^2) \textbf{ mod } m$ (für $i < m$).

- h' ist eine übliche Hashfunktion, c_1, $c_2 \neq 0$ Konstanten.

Quadratisches Sondieren

Hashfunktion beim quadratischen Sondieren

$h(k, i) = (h'(k) + c_1 \cdot i + c_2 \cdot i^2)$ **mod** m (für $i < m$).

- h' ist eine übliche Hashfunktion, c_1, $c_2 \neq 0$ Konstanten.

- Die Verschiebung der nachfolgende Sondierungen ist quadratisch von i abhängig.

Quadratisches Sondieren

Hashfunktion beim quadratischen Sondieren

$h(k, i) = (h'(k) + c_1 \cdot i + c_2 \cdot i^2) \textbf{ mod } m$ (für $i < m$).

- h' ist eine übliche Hashfunktion, c_1, $c_2 \neq 0$ Konstanten.

- Die Verschiebung der nachfolgende Sondierungen ist quadratisch von i abhängig.
- Die erste Sondierung bestimmt bereits die gesamte Sequenz.

Quadratisches Sondieren

Hashfunktion beim quadratischen Sondieren

$h(k, i) = (h'(k) + c_1 \cdot i + c_2 \cdot i^2) \ \mathbf{mod} \ m$ (für $i < m$).

- h' ist eine übliche Hashfunktion, c_1, $c_2 \neq 0$ Konstanten.

- Die Verschiebung der nachfolgende Sondierungen ist quadratisch von i abhängig.
- Die erste Sondierung bestimmt bereits die gesamte Sequenz.

$\Rightarrow$ Auch hier können m verschiedene Sequenzen erzeugt werden (wenn c_1, c_2 geeignet gewählt wurden).

Quadratisches Sondieren

Hashfunktion beim quadratischen Sondieren

$h(k, i) = (h'(k) + c_1 \cdot i + c_2 \cdot i^2) \textbf{ mod } m$ (für $i < m$).

- h' ist eine übliche Hashfunktion, c_1, $c_2 \neq 0$ Konstanten.

- Die Verschiebung der nachfolgende Sondierungen ist quadratisch von i abhängig.
- Die erste Sondierung bestimmt bereits die gesamte Sequenz.

$\Rightarrow$ Auch hier können m verschiedene Sequenzen erzeugt werden (wenn c_1, c_2 geeignet gewählt wurden).

- Das Clustering von linearem Sondieren wird vermieden.

Quadratisches Sondieren

Hashfunktion beim quadratischen Sondieren

$h(k, i) = (h'(k) + c_1 \cdot i + c_2 \cdot i^2) \textbf{ mod } m$ (für $i < m$).

- h' ist eine übliche Hashfunktion, c_1, $c_2 \neq 0$ Konstanten.

- Die Verschiebung der nachfolgende Sondierungen ist quadratisch von i abhängig.
- Die erste Sondierung bestimmt bereits die gesamte Sequenz.

$\Rightarrow$ Auch hier können m verschiedene Sequenzen erzeugt werden (wenn c_1, c_2 geeignet gewählt wurden).

- Das Clustering von linearem Sondieren wird vermieden.
- Jedoch tritt *sekundäres* Clustering immer noch auf:

$$h(k, 0) = h(k', 0) \text{ verursacht } h(k, i) = h(k', i) \text{ für alle } i.$$

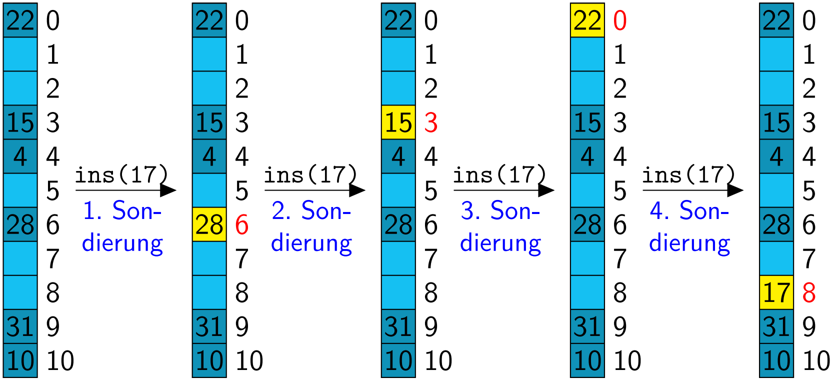
Doppeltes Hashing

Hashfunktion beim doppelten Hashing

$h(k, i) = (h_1(k) + i \cdot h_2(k)) \textbf{ mod } m$ (für $i < m$).

- h_1, h_2 sind übliche Hashfunktionen.

Doppeltes Hashing: Beispiel



$$h_1(k) = k \textbf{ mod } 11$$
$$h_2(k) = 1 + k \textbf{ mod } 10$$

$$h(k, i) = (h_1(k) + i \cdot h_2(k)) \textbf{ mod } 11$$

Doppeltes Hashing

Hashfunktion beim doppelten Hashing

$h(k, i) = (h_1(k) + i \cdot h_2(k)) \textbf{ mod } m$ (für $i < m$).

- h_1, h_2 sind übliche Hashfunktionen.

Doppeltes Hashing

Hashfunktion beim doppelten Hashing

$h(k, i) = (h_1(k) + i \cdot h_2(k))$ **mod** m (für $i < m$).

- h_1, h_2 sind übliche Hashfunktionen.

- Die Verschiebung der nachfolgende Sondierungen ist von $h_2(k)$ abhängig.

Doppeltes Hashing

Hashfunktion beim doppelten Hashing

$h(k, i) = (h_1(k) + i \cdot h_2(k)) \textbf{ mod } m$ (für $i < m$).

- h_1, h_2 sind übliche Hashfunktionen.

- Die Verschiebung der nachfolgende Sondierungen ist von $h_2(k)$ abhängig.
- Die erste Sondierung bestimmt nicht die gesamte Sequenz.

Doppeltes Hashing

Hashfunktion beim doppelten Hashing

$h(k, i) = (h_1(k) + i \cdot h_2(k)) \textbf{ mod } m$ (für $i < m$).

- h_1, h_2 sind übliche Hashfunktionen.

- Die Verschiebung der nachfolgende Sondierungen ist von $h_2(k)$ abhängig.
- Die erste Sondierung bestimmt nicht die gesamte Sequenz.

$\Rightarrow$ Bessere Verteilung der Schlüssel in der Hashtabelle.

Doppeltes Hashing

Hashfunktion beim doppelten Hashing

$h(k, i) = (h_1(k) + i \cdot h_2(k))$ **mod** m (für $i < m$).

- h_1, h_2 sind übliche Hashfunktionen.

- Die Verschiebung der nachfolgende Sondierungen ist von $h_2(k)$ abhängig.
- Die erste Sondierung bestimmt nicht die gesamte Sequenz.

$\Rightarrow$ Bessere Verteilung der Schlüssel in der Hashtabelle.

$\Rightarrow$ Approximiert das gleichverteilte Hashing.

Doppeltes Hashing

Hashfunktion beim doppelten Hashing

$h(k, i) = (h_1(k) + i \cdot h_2(k)) \textbf{ mod } m$ (für $i < m$).

- h_1, h_2 sind übliche Hashfunktionen.

- Die Verschiebung der nachfolgende Sondierungen ist von $h_2(k)$ abhängig.
- Die erste Sondierung bestimmt nicht die gesamte Sequenz.

$\Rightarrow$ Bessere Verteilung der Schlüssel in der Hashtabelle.

$\Rightarrow$ Approximiert das gleichverteilte Hashing.

- Sind h_2 und m relativ prim, wird die gesamte Hashtabelle abgesucht.

Doppeltes Hashing

Hashfunktion beim doppelten Hashing

$h(k, i) = (h_1(k) + i \cdot h_2(k)) \textbf{ mod } m$ (für $i < m$).

- h_1, h_2 sind übliche Hashfunktionen.

- Die Verschiebung der nachfolgende Sondierungen ist von $h_2(k)$ abhängig.
- Die erste Sondierung bestimmt nicht die gesamte Sequenz.

$\Rightarrow$ Bessere Verteilung der Schlüssel in der Hashtabelle.

$\Rightarrow$ Approximiert das gleichverteilte Hashing.

- Sind h_2 und m relativ prim, wird die gesamte Hashtabelle abgesucht.
  - Wähle z. B. $m = 2^k$ und h_2 so, dass sie nur ungerade Zahlen erzeugt.

Doppeltes Hashing

Hashfunktion beim doppelten Hashing

$h(k, i) = (h_1(k) + i \cdot h_2(k))$ **mod** m (für $i < m$).

- h_1, h_2 sind übliche Hashfunktionen.

- Die Verschiebung der nachfolgende Sondierungen ist von $h_2(k)$ abhängig.
- Die erste Sondierung bestimmt nicht die gesamte Sequenz.

$\Rightarrow$ Bessere Verteilung der Schlüssel in der Hashtabelle.

$\Rightarrow$ Approximiert das gleichverteilte Hashing.

- Sind h_2 und m relativ prim, wird die gesamte Hashtabelle abgesucht.
  - Wähle z. B. $m = 2^k$ und h_2 so, dass sie nur ungerade Zahlen erzeugt.
- Jedes mögliche Paar $h_1(k)$ und $h_2(k)$ erzeugt eine andere Sequenz.

Doppeltes Hashing

Hashfunktion beim doppelten Hashing

$h(k, i) = (h_1(k) + i \cdot h_2(k))$ **mod** m (für $i < m$).

- h_1, h_2 sind übliche Hashfunktionen.

- Die Verschiebung der nachfolgende Sondierungen ist von $h_2(k)$ abhängig.
- Die erste Sondierung bestimmt nicht die gesamte Sequenz.

$\Rightarrow$ Bessere Verteilung der Schlüssel in der Hashtabelle.

$\Rightarrow$ Approximiert das gleichverteilte Hashing.

- Sind h_2 und m relativ prim, wird die gesamte Hashtabelle abgesucht.
  - Wähle z. B. $m = 2^k$ und h_2 so, dass sie nur ungerade Zahlen erzeugt.
- Jedes mögliche Paar $h_1(k)$ und $h_2(k)$ erzeugt eine andere Sequenz.

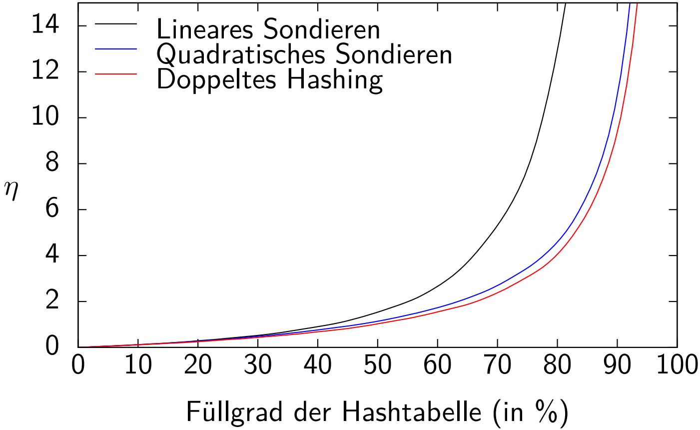
$\Rightarrow$ Daher können m^2 verschiedene Permutationen erzeugt werden.

Praktische Effizienz von Doppeltem Hashing

- Hashtabelle mit 538 051 Einträgen (Endfüllgrad 99,95%)

Praktische Effizienz von Doppeltem Hashing

- Hashtabelle mit 538 051 Einträgen (Endfüllgrad 99,95%) 99,8 % -> 358
- *Mittlere* Anzahl Kollisionen η pro Einfügen in die Hashtabelle:



Effizienz der offenen Adressierung

Effizienz der offenen Adressierung

Unter der Annahme von gleichverteiltem Hashing gilt:

Effizienz der offenen Adressierung

Unter der Annahme von gleichverteiltem Hashing gilt:

Erfolglose Suche

Die erfolglose Suche benötigt $O\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$ Zeit im Average-Case.

Effizienz der offenen Adressierung

Unter der Annahme von gleichverteiltem Hashing gilt:

Erfolglose Suche

Die erfolglose Suche benötigt $O\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$ Zeit im Average-Case.

- Bei 50% Füllung sind durchschnittlich 2 Sondierungen nötig.

Effizienz der offenen Adressierung

Unter der Annahme von gleichverteiltem Hashing gilt:

Erfolglose Suche

Die erfolglose Suche benötigt $O\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$ Zeit im Average-Case.

- Bei 50% Füllung sind durchschnittlich 2 Sondierungen nötig.
- Bei 90% Füllung sind durchschnittlich 10 Sondierungen nötig.

Effizienz der offenen Adressierung

Unter der Annahme von gleichverteiltem Hashing gilt:

Erfolglose Suche

Die erfolglose Suche benötigt $O\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$ Zeit im Average-Case.

- Bei 50% Füllung sind durchschnittlich 2 Sondierungen nötig.
- Bei 90% Füllung sind durchschnittlich 10 Sondierungen nötig.

Erfolgreiche Suche

Die erfolgreiche Suche benötigt $O\left(\frac{1}{\alpha} \cdot \ln \frac{1}{1-\alpha}\right)$ im Average-Case.

Effizienz der offenen Adressierung

Unter der Annahme von gleichverteiltem Hashing gilt:

Erfolglose Suche

Die erfolglose Suche benötigt $O\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$ Zeit im Average-Case.

- Bei 50% Füllung sind durchschnittlich 2 Sondierungen nötig.
- Bei 90% Füllung sind durchschnittlich 10 Sondierungen nötig.

Erfolgreiche Suche

Die erfolgreiche Suche benötigt $O\left(\frac{1}{\alpha} \cdot \ln \frac{1}{1-\alpha}\right)$ im Average-Case.

- Bei 50% Füllung sind durchschnittlich 1,39 Sondierungen nötig.

Effizienz der offenen Adressierung

Unter der Annahme von gleichverteiltem Hashing gilt:

Erfolglose Suche

Die erfolglose Suche benötigt $O\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$ Zeit im Average-Case.

- Bei 50% Füllung sind durchschnittlich 2 Sondierungen nötig.
- Bei 90% Füllung sind durchschnittlich 10 Sondierungen nötig.

Erfolgreiche Suche

Die erfolgreiche Suche benötigt $O\left(\frac{1}{\alpha} \cdot \ln \frac{1}{1-\alpha}\right)$ im Average-Case.

- Bei 50% Füllung sind durchschnittlich 1,39 Sondierungen nötig.
- Bei 90% Füllung sind durchschnittlich 2,56 Sondierungen nötig.

Effizienz der offenen Adressierung

Unter der Annahme von gleichverteiltem Hashing gilt:

Erfolglose Suche

Die erfolglose Suche benötigt $O\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$ Zeit im Average-Case.

- Bei 50% Füllung sind durchschnittlich 2 Sondierungen nötig.
- Bei 90% Füllung sind durchschnittlich 10 Sondierungen nötig.

Erfolgreiche Suche

Die erfolgreiche Suche benötigt $O\left(\frac{1}{\alpha} \cdot \ln \frac{1}{1-\alpha}\right)$ im Average-Case.

- Bei 50% Füllung sind durchschnittlich 1,39 Sondierungen nötig.
- Bei 90% Füllung sind durchschnittlich 2,56 Sondierungen nötig.

Bei der Verkettung hatten wir $\Theta(1+\alpha)$ in beiden Fällen erhalten.

Analyse der erfolglosen Suche (I)

Annahmen

- Betrachte eine zufällig erzeugte Sondierungssequenz für Schlüssel k.

Analyse der erfolglosen Suche (I)

Annahmen

- Betrachte eine zufällig erzeugte Sondierungssequenz für Schlüssel k.
- Annahme: jede mögliche Sondierungssequenz hat eine gleiche Wahrscheinlichkeit, d. h. $\frac{1}{m!}$, da es $m!$ mögliche Permutationen von den Positionen $0, \ldots, m{-}1$ gibt.

Analyse der erfolglosen Suche (I)

Annahmen

- Betrachte eine zufällig erzeugte Sondierungssequenz für Schlüssel k.
- Annahme: jede mögliche Sondierungssequenz hat eine gleiche Wahrscheinlichkeit, d. h. $\frac{1}{m!}$, da es $m!$ mögliche Permutationen von den Positionen $0, \ldots, m-1$ gibt.
- Bemerkung: dies ist nicht unrealistisch, da im Idealfall die Sondierungssequenz für k möglichst unabhängig ist von der Sondierungssequenz für k', $k \neq k'$.

Analyse der erfolglosen Suche (I)

Annahmen

- Betrachte eine zufällig erzeugte Sondierungssequenz für Schlüssel k.
- Annahme: jede mögliche Sondierungssequenz hat eine gleiche Wahrscheinlichkeit, d. h. $\frac{1}{m!}$, da es $m!$ mögliche Permutationen von den Positionen $0, \ldots, m-1$ gibt.
- Bemerkung: dies ist nicht unrealistisch, da im Idealfall die Sondierungssequenz für k möglichst unabhängig ist von der Sondierungssequenz für k', $k \neq k'$.
- Wir nehmen (wie vorher) an, dass die Berechung von Hashwerten in $O(1)$ liegt.

Analyse der erfolglosen Suche (II)

Erfolglose Suche

Eine Suche für k ist erfolglos wenn für i alle Slots $h(k, 0), \ldots, h(k, i{-}1)$ belegt sind, jedoch unterschiedlich von k sind, und $h(k, i)$ ist unbelegt.

Analyse der erfolglosen Suche (II)

Erfolglose Suche

Eine Suche für k ist erfolglos wenn für i alle Slots $h(k,0), \ldots, h(k,i{-}1)$ belegt sind, jedoch unterschiedlich von k sind, und $h(k,i)$ ist unbelegt.

Sei X die Anzahl der belegten Positionen bis eine freie Position gefunden ist:

$$X \;=\; \min\{\, i \in \mathbb{N} : h(k,i) \text{ ist unbelegt } \}\,.$$

Sei $E[X]$ der Erwartungswert von X.

Analyse der erfolglosen Suche (II)

Erfolglose Suche

Eine Suche für k ist erfolglos wenn für i alle Slots $h(k,0), \ldots, h(k,i-1)$ belegt sind, jedoch unterschiedlich von k sind, und $h(k,i)$ ist unbelegt.

Sei X die Anzahl der belegten Positionen bis eine freie Position gefunden ist:

$$X \;=\; \min \{ \, i \in \mathbb{N} : h(k,i) \text{ ist unbelegt } \} \, .$$

Sei $E[X]$ der Erwartungswert von X.
Dann: die Average-Case Komplexität einer erfolglosen Suche ist $1 + E[X]$.

Analyse der erfolglosen Suche (II)

Erfolglose Suche

Eine Suche für k ist erfolglos wenn für i alle Slots $h(k, 0), \ldots, h(k, i-1)$ belegt sind, jedoch unterschiedlich von k sind, und $h(k, i)$ ist unbelegt.

Sei X die Anzahl der belegten Positionen bis eine freie Position gefunden ist:

$$X = \min \{ i \in \mathbb{N} : h(k, i) \text{ ist unbelegt } \}.$$

Sei $E[X]$ der Erwartungswert von X.
Dann: die Average-Case Komplexität einer erfolglosen Suche ist $1 + E[X]$.

Lemma

$E[X] = \frac{n}{m-n+1}$.

Beweis: in der Vorlesung.

Analyse der erfolglosen Suche (II)

Erfolglose Suche

Eine Suche für k ist erfolglos wenn für i alle Slots $h(k,0), \ldots, h(k, i{-}1)$ belegt sind, jedoch unterschiedlich von k sind, und $h(k,i)$ ist unbelegt.

Sei X die Anzahl der belegten Positionen bis eine freie Position gefunden ist:

$$X \;=\; \min\,\{\, i \in \mathbb{N} : h(k,i) \text{ ist unbelegt } \}\,.$$

Sei $E[X]$ der Erwartungswert von X.
Dann: die Average-Case Komplexität einer erfolglosen Suche ist $1 + E[X]$.

Lemma

$E[X] \;=\; \frac{n}{m-n+1}$.

Beweis: in der Vorlesung. Damit: $1 + E[X] = 1 + \frac{n}{m-n+1} \;=\; \frac{1}{1-\alpha}$.

Analyse der erfolgeichen Suche (I)

- Sei Schlüssel k_i der i-te eingefügte Schlüssel in der Hashtabelle.

Analyse der erfolgeichen Suche (I)

- Sei Schlüssel k_i der i-te eingefügte Schlüssel in der Hashtabelle.
- Betrachte eine erfolgreiche Suche für Schlüssel k_{i+1}.

Analyse der erfolgeichen Suche (I)

- Sei Schlüssel k_i der i-te eingefügte Schlüssel in der Hashtabelle.
- Betrachte eine erfolgreiche Suche für Schlüssel k_{i+1}.
- Sei X_i die Anzahl der Sondierungen beim Einfügen vom Schlüssel k_i.

Analyse der erfolgeichen Suche (I)

- Sei Schlüssel k_i der i-te eingefügte Schlüssel in der Hashtabelle.
- Betrachte eine erfolgreiche Suche für Schlüssel k_{i+1}.
- Sei X_i die Anzahl der Sondierungen beim Einfügen vom Schlüssel k_i.
- Im Schnitt, braucht eine erfolgreiche Suche für k_i, $E[X_i]$ Zeiteinheiten.

Analyse der erfolgeichen Suche (I)

- Sei Schlüssel k_i der i-te eingefügte Schlüssel in der Hashtabelle.
- Betrachte eine erfolgreiche Suche für Schlüssel k_{i+1}.
- Sei X_i die Anzahl der Sondierungen beim Einfügen vom Schlüssel k_i.
- Im Schnitt, braucht eine erfolgreiche Suche für k_i, $E[X_i]$ Zeiteinheiten.
- Die Average-Case Zeitkomplexität für eine erfolgreiche Suche ist:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} E[X_{i+1}].$$

Analyse der erfolgeichen Suche (I)

- Sei Schlüssel k_i der i-te eingefügte Schlüssel in der Hashtabelle.
- Betrachte eine erfolgreiche Suche für Schlüssel k_{i+1}.
- Sei X_i die Anzahl der Sondierungen beim Einfügen vom Schlüssel k_i.
- Im Schnitt, braucht eine erfolgreiche Suche für k_i, $E[X_i]$ Zeiteinheiten.
- Die Average-Case Zeitkomplexität für eine erfolgreiche Suche ist:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} E[X_{i+1}].$$

Lemma

$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} E[X_{i+1}] \;\in\; O\left(\frac{1}{\alpha} \cdot \ln \frac{1}{1-\alpha}\right).$

Beweis: in der Vorlesung.