

Memoization

Memoization

- ▶ Bei jedem Funktionsaufruf überprüfe, ob das Ergebnis bereits berechnet wurde (im Cache ist).
- ▶ Ist das nicht der Fall, berechne den Wert und speichere zusätzlich das Ergebnis.

Beispiel

```

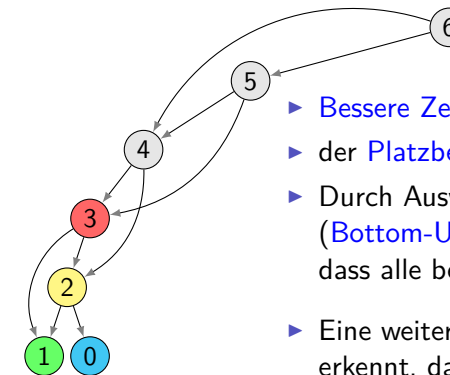
1  int fibDP(int n) {
2      if (n < 2) return n;
3      int f1 = getCache(n-1), f2 = getCache(n-2);
4      if (f1 == -1) f1 = fibDP(n-1); // nicht gefunden
5      if (f2 == -1) f2 = fibDP(n-2);
6      int fib = f1 + f2;
7      setCache(n, fib);
8      return fib;
9  }

```

Übersicht

Memoization – Dynamische Programmierung

- ▶ Memoization hilft, wenn die Teilprobleme überlappen.

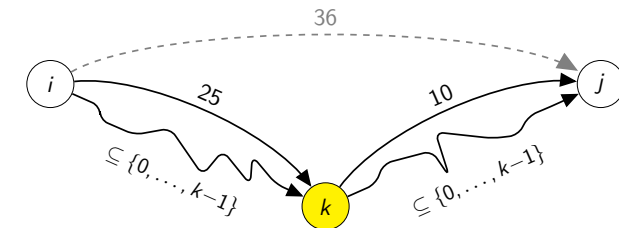


Abhängigkeitsgraph

- ▶ **Bessere Zeit-Komplexität:** $\Theta(n)$ statt $\Theta(2^n)$, aber
- ▶ der **Platzbedarf wächst** dabei auf $\Theta(n)$.
- ▶ Durch Auswertung von unten-nach-oben (**Bottom-Up**) kann sogar sichergestellt werden, dass alle benötigten Werte bereits berechnet sind.
- ▶ Eine weitere Verbesserung ergibt sich, indem man erkennt, dass hier jeweils nur die **zwei letzten** Werte benötigt werden (in-place).

⇒ Auf diesen Grundideen basiert die **Dynamische Programmierung**.

Rekursionsgleichungen: Floyd-Warshall



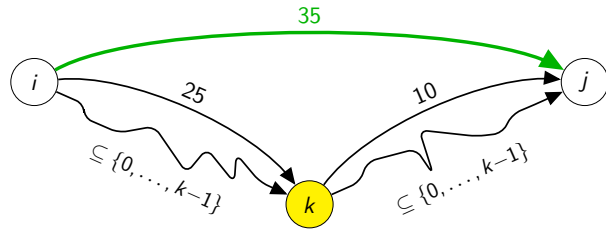
Sei $d_{ij}^{(k)}$ die Länge eines kürzesten Pfades von i nach j über Knoten in der Menge $\{0, 1, \dots, k\}$.

Rekursionsgleichung die dem Algorithmus zur Grunde liegt:

$$d_{ij}^{(k)} = \begin{cases} W(i, j) & \text{für } k = 0 \\ \min(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}) & \text{für } k > 0 \end{cases}$$

- ▶ Top-down Abhängigkeit: $d_{ij}^{(k)}$ hängt von $d_{ij}^{(k-1)}$ ab.
- ▶ Bottom-up Berechnung: $d_{ij}^{(0)}, d_{ij}^{(1)}, d_{ij}^{(2)}, \dots$ usw.

Rekursionsgleichungen: Floyd-Warshall



Sei $d_{ij}^{(k)}$ die Länge eines kürzesten Pfades von i nach j über Knoten in der Menge $\{0, 1, \dots, k\}$.

Rekursionsgleichung die dem Algorithmus zur Grunde liegt:

$$d_{ij}^{(k)} = \begin{cases} W(i, j) & \text{für } k = 0 \\ \min(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}) & \text{für } k > 0 \end{cases}$$

- ▶ Top-down Abhängigkeit: $d_{ij}^{(k)}$ hängt von $d_{ij}^{(k-1)}$ ab.
- ▶ Bottom-up Berechnung: $d_{ij}^{(0)}, d_{ij}^{(1)}, d_{ij}^{(2)}, \dots$ usw.

Übersicht

Dynamische Programmierung

- ▶ Die meisten DP-Probleme sind Optimierungsprobleme, d. h. es gibt verschiedene Lösungen, die mit einer **Kostenfunktion** bewertet werden. Gesucht ist jeweils eine Lösung mit **minimalen Kosten** (bzw. maximalem Wert).

Dynamischer Programmierung kann man i. d. R. in vier Teile gliedern:

1. Charakterisiere die **Struktur** einer optimalen Lösung, und stelle fest ob diese DP ermöglicht.
 - ▶ Teilprobleme sind (teilweise) überlappend
 - ▶ Rekursive Abhängigkeit zwischen den Teilproblemen.
2. Stelle die **Rekursionsgleichung** (top-down) für den **Wert** der Lösung auf.
3. **Löse Rekursionsgleichung** bottom-up.
4. Bestimme aus dem Wert der Lösung die **Argumente** der Lösung. Rekonstruiere die Lösung.

Weitere Bsp: Fibonacci, CYK (Cock-Younger-Kasami)-Algorithmus (VL FOSAP), Floyd(-Warshall), ...

Ketten von Matrixmultiplikationen – Motivation (I)

Matrixmultiplikation

$C = A \cdot B$ mit $A \in \mathbb{R}^{i \times j}$, $B \in \mathbb{R}^{j \times k}$, $C \in \mathbb{R}^{i \times k}$.

- ▶ Die Anzahl der Spalten in Matrix A muss dabei gleich der Anzahl der Zeilen in B sein.
- ▶ Komplexität: $i \cdot j \cdot k$ Fließkomma-Multiplikationen.
- ▶ Betrachte nun die Multiplikation **mehrerer** Matrizen:
 $M = A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n$
- ▶ Wir gehen davon aus, dass die Matrizen jeweils miteinander **kompatibel** sind.
- ▶ Solche Ketten lassen sich wegen der Assoziativität der Matrixmultiplikation in **beliebiger Reihenfolge** berechnen / klammern.

Ketten von Matrixmultiplikationen – Motivation (II)

Beispiel

Sei $A_1 \in \mathbb{R}^{10 \times 100}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{100 \times 5}$, $A_3 \in \mathbb{R}^{5 \times 50}$.

- Berechnen wir $A_1 \cdot (A_2 \cdot A_3)$, so muss man $10 \cdot 100 \cdot 50 + 100 \cdot 5 \cdot 50 = 50\,000 + 25\,000 = 75\,000$ mal multiplizieren.
- Berechnen wir aber $(A_1 \cdot A_2) \cdot A_3$, dann ergeben sich $10 \cdot 100 \cdot 5 + 10 \cdot 5 \cdot 50 = 5\,000 + 2\,500 = 7\,500$ Multiplikationen.

Problem

Finde für eine Kette von Matrizen $A_1, A_2, \dots, A_n$, mit Dimensionen $d_0 \times d_1, d_1 \times d_2, \dots, d_{n-1} \times d_n$, eine Klammerung, so dass die Anzahl der Fließkomma-Multiplikationen **minimal** ist.

Rekursionsgleichung

$$\underbrace{(A_1 \cdot \dots \cdot A_k)}_{k \text{ Matrizen}} \cdot \underbrace{(A_{k+1} \cdot \dots \cdot A_n)}_{n-k \text{ Matrizen}}$$

$m[i, j]$ sei die **minimale** Anzahl Multiplikationen für die Teilkette $A_i \cdot \dots \cdot A_j$.

- Offenbar ist $m[i, i] = 0$ für alle $0 < i \leq n$.
- Die Dimension einer Teilkette ist $d_{i-1} \times d_j$.
- Teilen bei Position k ergibt: $m[i, j] = m[i, k] + d_{i-1} \cdot d_k \cdot d_j + m[k+1, j]$.
- Wir suchen dabei das **optimale** k , also:

$$m[i, j] = \begin{cases} 0 & \text{für } i = j, \\ \min_{i \leq k < j} (m[i, k] + m[k+1, j] + d_{i-1} \cdot d_k \cdot d_j) & \text{für } i < j. \end{cases}$$

Ketten von Matrixmultiplikationen

Sei $P(n)$ die Anzahl der möglichen Klammerungen für n Matrizen:

$$\underbrace{(A_1 \cdot \dots \cdot A_k)}_{k \text{ Matrizen}} \cdot \underbrace{(A_{k+1} \cdot \dots \cdot A_n)}_{n-k \text{ Matrizen}}$$

Damit erhält man die Rekursionsgleichung

$$P(n) = \sum_{k=1}^{n-1} P(k) \cdot P(n-k), \quad P(1) = 1.$$

- Deren Lösung liegt in $\Omega(2^n)$.
- Einfach **alle Möglichkeiten auszuprobieren** ist **keine Option**.

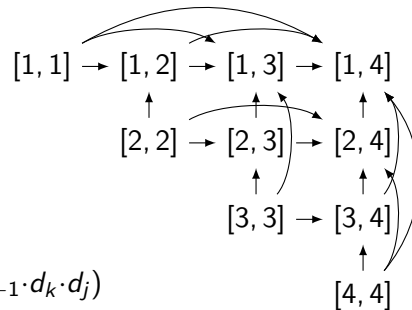
Idee: Stelle nach dem selben Prinzip eine Rekursionsgleichung für die **minimale** Anzahl an Multiplikationen auf.

Ketten von Matrixmultiplikationen – Bottom-Up-Lösung (I)

$$m[i, j] = \begin{cases} 0 & \text{für } i = j, \\ \min_{i \leq k < j} (m[i, k] + m[k+1, j] + d_{i-1} \cdot d_k \cdot d_j) & \text{für } i < j. \end{cases}$$

- Wie bei Fibonacci wird z. B. das Teilproblem $m[0, 1]$ **mehrfach** verwendet: von $m[0, 2], m[0, 3], \dots, m[0, n]$.
- Es gibt für alle $1 \leq i < j \leq n$ ein Teilproblem, also insgesamt nur $\binom{n}{2} \in \Theta(n^2)$ Teilprobleme.
- Wählen wir eine **geschickte Berechnungsreihenfolge** und speichern alle $m[i, j]$, dann lässt sich $m[i, j]$ in $\Theta(n)$ berechnen, da die Werte $m[i, k]$ und $m[k+1, j]$ bereits bekannt sind.

Ketten von Matrixmultiplikationen – Bottom-Up-Lösung (II)



$$m[i,j] = \min_{i \leq k < j} (m[i,k] + m[k+1,j] + d_{i-1} \cdot d_k \cdot d_j)$$

- Damit ist eine Zeitkomplexität von $\Theta(n^3)$ bei einem Platzbedarf von $\Theta(n^2)$ möglich.
- Erinnerung: Die naive Variante hätte $\Omega(2^n)$ Zeit, allerdings bei nur $\Theta(1)$ Platzbedarf, benötigt (*Time-Memory-Tradeoff*).
- In der Regel ist es nun eine große Zeitersparnis, zunächst die optimale Klammerung zu finden, statt unüberlegt zu multiplizieren.

Ketten von Matrixmultiplikationen – Algorithmus

```

1 // Eingabe: Die Dimensionen der Matrizen: dim[i]=di für i=0...n
2 int matMultOrder(int dim[n+1], int n) {
3     int m[n,n]; // hier 0-basiert!
4     for (int i = 0; i < n; i++)
5         m[i,i] = 0; // Diagonale
6     for (int i = n-1; i >= 0; i--) // Zeilen
7         for (int j = i+1; j < n; j++) { // Spalten
8             int curMin = +inf;
9             for (int k = i; k < j-1; k++) {
10                 curMin = min(curMin,
11                             m[i,k] + m[k+1,j] + dim[i]*dim[k+1]*dim[j+1]);
12             }
13             m[i,j] = curMin;
14         }
15     return m[0,n-1];
16 }

```

- Zur einfacheren Rekonstruktion der Lösung werden wir in einer zweiten Matrix jeweils den Index k mit dem Minimum speichern.

Ketten von Matrixmultiplikationen – Beispiel

Beispiel

Sei $A_0 \in \mathbb{R}^{30 \times 1}$, $A_1 \in \mathbb{R}^{1 \times 40}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{40 \times 10}$, $A_3 \in \mathbb{R}^{10 \times 25}$.

$$m[i,j] = \min(m[i,k] + m[k+1,j] + \text{dim}[i] \cdot \text{dim}[k+1] \cdot \text{dim}[j+1]);$$

$\text{dim}[] = \{30, 1, 40, 10, 25\};$

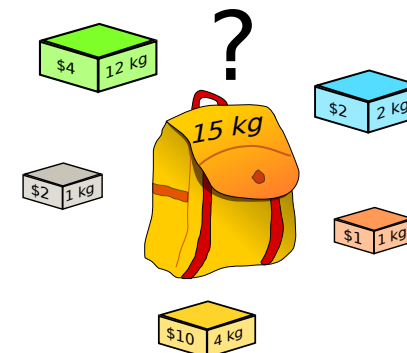
$$\begin{array}{c}
 \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 \\
 0 & 0 & 1200 & 700 & \mathbf{1400} \\
 1 & & 0 & 400 & 650 \\
 2 & & & 0 & 10\,000 \\
 3 & & & & 0 \end{matrix}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \begin{matrix} & 0 & 0 & 0 \\
 & 1 & 2 \\
 & & 2 \end{matrix}
 \end{array}$$

- $((A_0 A_1) A_2) A_3$ benötigt 20 700 Multiplikationen.
- Rekonstruktion: $A_0 \cdot ((A_1 \cdot A_2) \cdot A_3)$ ist optimal – 1400 Multiplikationen.

Das Rucksackproblem (I)

Das Rucksackproblem (0-1 Knapsack)

Gegeben sei ein Rucksack, mit maximaler Tragkraft M , sowie n Gegenstände, die sowohl ein Gewicht als auch einen Wert haben.
Nehme möglichst viel Wert mit, ohne den Rucksack zu überladen.



Das Rucksackproblem (II)

Gegeben:

- ▶ Maximale Tragkraft M ,
- ▶ n Gegenstände: $G = \{0, \dots, n-1\}$,
- ▶ Gewichte: $w_i \in \mathbb{N}_0$ für $i \in G$,
- ▶ Wert: $c_i \in \mathbb{N}_0$ für $i \in G$ (bzw. Kosten).

Gesucht:

- ▶ Der maximale Wert $c_{\max}$.
- ▶ $S \subseteq G$ mit $c_{\max} = \sum_{i \in S} c_i$ unter der Nebenbedingung $\sum_{i \in S} w_i \leq M$.

Das Rucksackproblem – Rekursionsgleichung (II)

Sei also $C[i, j]$ der maximale Wert des Rucksacks mit Tragkraft j , wenn man nur die Gegenstände $\{0, \dots, i-1\}$ berücksichtigt.

Es ergibt sich folgende Rekursionsgleichung:

$$C[i, j] = \begin{cases} \max(C[i-1, j], c_{i-1} + C[i-1, j-w_{i-1}]) & \text{für } j < 0 \\ -\infty & \text{für } i = 0, j \geq 0 \\ 0 & \text{für } i = 0, j \geq 0 \end{cases}$$

- ▶ Dann ist $c_{\max} = C[n, M]$.
- ▶ Diese Rekursionsgleichung lösen wir nun bottom-up, indem wir die Rucksäcke mit allen möglichen Gewichten $\{0, \dots, M\}$ berechnen, wenn wir jeweils einen weiteren Gegenstand hinzunehmen.

Das Rucksackproblem – Rekursionsgleichung (I)

Wir wollen das Problem mittels Dynamischer Programmierung lösen.

- ▶ Wir bestimmen zunächst $c_{\max}$:
- ▶ Angenommen wir kennen den maximalen Wert $c'_{\max}$ des Rucksacks mit Tragkraft M' , bei dem nur die ersten $n-1$ Gegenstände berücksichtigt werden.
- ▶ Für $c_{\max}$ stellt sich also die Frage, ob der n -te Gegenstand (Gewicht: w_{n-1} , Wert: c_{n-1}) mitgenommen wird.

Betrachten wir beide Fälle:

Ohne: $c_{\max}$ wäre dann gleich $c'_{\max}$ für $M' = M$.

Mit: $c_{\max}$ wäre dann gleich $c'_{\max} + c_{n-1}$ für $M' = M - w_{n-1}$.
Falls $M' < 0$, dann setzen wir $c'_{\max} = -\infty$ („geht nicht“).

⇒ Wähle den Fall mit dem größeren Wert.

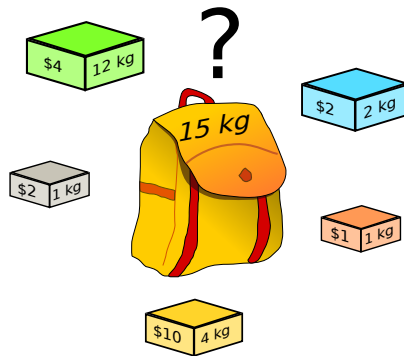
Das Rucksackproblem – Algorithmus

```

1 // Eingabe: Gewichte w[i], Werte c[i], Tragkraft M
2 int knapDP(int w[n], int c[n], int n, int M) {
3     int C[n+1, M+1];
4     for (int j = 0; j <= M; j++)
5         C[0, j] = 0;
6     for (int i = 1; i <= n; i++)
7         for (int j = 0; j <= M; j++)
8             if (w[i-1] <= j) {
9                 C[i, j] = max(C[i-1, j], c[i-1] + C[i-1, j-w[i-1]]);
10            } else {
11                C[i, j] = C[i-1, j]; // passt nicht
12            }
13     return C[n, M];
14 }
```

- ▶ Zeitkomplexität: $\Theta(n \cdot M)$, Platzkomplexität: $\Theta(n \cdot M)$.

Das Rucksackproblem – Beispiel



Longest Common Subsequence – einige Begriffe

Teilsequenz

Sei $A = (a_1, \dots, a_m)$ eine Sequenz. Die Sequenz $A_{i_k} = (a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$ ist eine **Teilsequenz** von A wobei $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ und $i_j \in \{1, \dots, m\}$.

Eine Teilsequenz von A entsteht aus A indem Elemente weggelassen werden.

Beispiel

bcd und **aa** sind Teilsequenzen von $A = \text{abc**b**dab}$.

Gemeinsame Teilsequenz

Sequenz C ist eine **gemeinsame Teilsequenz** von A und B wenn C sowohl von A als auch von B eine Teilsequenz ist.

Beispiel

bca ist eine gemeinsame Teilsequenz von $A = \text{abc**b**dab}$ und $B = \text{bd**c**aba}$.

Das Rucksackproblem – Rekonstruktion

Offen ist noch die Frage, *welche* Gegenstände ($S \subseteq G$) nun eigentlich mitgenommen werden müssen, um $c_{\max}$ zu erreichen.

- Falls $C[i, j] = C[i - 1, j]$ ist, dann wurde der Gegenstand nicht mitgenommen (auch bei $c_i = 0$).
- Ausgehend von $C[n, M]$ kann man somit (mit Hilfe der w_i) die Menge S **rekonstruieren** (in $\Theta(n)$).

Beispiel

$w[] = \{ 2, 12, 1, 1, 4 \}$, $c[] = \{ 2, 4, 2, 1, 10 \}$, $M = 15$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	4	4	4	6	6
3	0	2	2	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	6	6	8
4	0	2	3	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	6	7	8
5	0	2	3	4	10	12	13	14	15	15	15	15	15	15	15	15

Longest Common Subsequence – einige Begriffe

Problem der längsten gemeinsamen Teilsequenz

Gegeben die zwei Sequenzen $A = (a_1, \dots, a_m)$ und $B = (b_1, \dots, b_n)$, bestimme deren längsten gemeinsamen Teilsequenz (longest common subsequence), $LCS(A, B)$.

Beispiel

bca ist eine gemeinsame Teilsequenz von $A = \text{abc**b**dab}$ und $B = \text{bd**c**aba}$, aber keine LCS.

bcba ist eine LCS von $A = \text{abc**b**dab}$ und $B = \text{bd**c**aba}$.

bdab ist auch eine LCS von $A = \text{abc**b**dab}$ und $B = \text{bd**c**aba}$.

Naiver Ansatz: betrachte alle Teilsequenzen von A , und überprüfe, welche auch eine Teilsequenz von B sind, und bewahre die längste gefundene Teilsequenz. Zeitkomplexität $\Theta(2^m)$ da es 2^m Teilsequenzen von A gibt.

Longest Common Subsequence – Eigenschaften (I)

Sei $A_i = (a_1, \dots, a_i)$ der i -te Präfix von $A = (a_1, \dots, a_m)$ für $0 \leq i \leq m$.

Lemma (Optimale Teilstruktur)

1. Enden zwei Sequenzen mit dem selben Zeichen $a_m = b_n$, dann ist dieses Zeichen auch Teil der LCS:

$$LCS(A_m, B_n) = (LCS(A_{m-1}, B_{n-1}), a_m).$$

2. Andernfalls gilt entweder

$$LCS(A_m, B_n) = LCS(A_m, B_{n-1}) \quad \text{oder}$$

$$LCS(A_m, B_n) = LCS(A_{m-1}, B_n).$$

Insbesondere ist

$$|LCS(A_m, B_n)| = \max(|LCS(A_m, B_{n-1})|, |LCS(A_{m-1}, B_n)|).$$

Longest Common Subsequence – Rekursionsgleichung

Wir können wieder die Rekursionsgleichung für den Wert, also die Länge der LCS aufstellen: $L[i, j] = |LCS(A_i, B_j)|$

$$L[i, j] = \begin{cases} 0 & \text{für } i = 0 \text{ oder } j = 0 \\ L[i-1, j-1] + 1 & \text{falls } a_i = b_j, i, j > 0 \\ \max(L[i, j-1], L[i-1, j]) & \text{falls } a_i \neq b_j, i, j > 0 \end{cases}$$

- ▶ Das lässt sich direkt als Algorithmus umsetzen (Hausaufgabe).
- ▶ Dessen Laufzeit ist $O(|A| \cdot |B|)$, ebenso seine Platzkomplexität.
- ▶ Ähnlich dem Rucksackproblem lässt sich dann die LCS rekonstruieren.

Longest Common Subsequence – Eigenschaften (II)

Lemma (Optimale Teilstruktur)

Enden zwei Sequenzen mit dem selben Zeichen $a_m = b_n$, dann:
 $LCS(A_m, B_n) = (LCS(A_{m-1}, B_{n-1}), a_m)$.

Beweis.

Sei $C = LCS(A_m, B_n)$ der Länge k . Wenn a_m nicht als letztes Zeichen in C vorkommt, dann könnte man a_m an C anhängen, und würde eine Teilsequenz von A_m und B_n erhalten. Dies widerspricht der Annahme, dass C eine LCS ist.

Nun ist der Präfix C_{k-1} eine gemeinsame Teilsequenz von A_{m-1} und B_{n-1} der Länge $k-1$. Wir zeigen $C_{k-1} = LCS(A_{m-1}, B_{n-1})$.

Widerspruchsbeweis. Nehme an, es gibt eine gemeinsame Teilsequenz D von A_{m-1} und B_{n-1} mit einer Länge von mindestens k . Dann würde das Anhängen von $a_m = b_n$ an D zu einer gemeinsamen Teilsequenz von A und B führen, deren Länge größer ist als k . Widerspruch. $\square$

Longest Common Subsequence – Beispiel

Zur Verdeutlichung verwenden wir folgende Notation:

↖ bei $a_i = b_j$, also $L[i, j] = L[i-1, j-1] + 1$
 ↑ bei $a_i \neq b_j$, für $L[i, j] = L[i-1, j]$
 ← bei $a_i \neq b_j$, für $L[i, j] = L[i, j-1]$ und nicht ↑

Beispiel

		N	I	E	D	E	R	L	A	N	D	E
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
D	0	↖	↖	↖	↖	↖	↖	↖	↖	↖	↖	↖
E	0	↖	↖	↖	↖	↖	↖	↖	↖	↖	↖	↖
U	0	↖	↖	↖	↖	↖	↖	↖	↖	↖	↖	↖
T	0	↖	↖	↖	↖	↖	↖	↖	↖	↖	↖	↖
S	0	↖	↖	↖	↖	↖	↖	↖	↖	↖	↖	↖
C	0	↖	↖	↖	↖	↖	↖	↖	↖	↖	↖	↖
H	0	↖	↖	↖	↖	↖	↖	↖	↖	↖	↖	↖
L	0	↖	↖	↖	↖	↖	↖	↖	↖	↖	↖	↖
A	0											
N	0											
D	0											

Longest Common Subsequence – Beispiel

Zur Verdeutlichung verwenden wir folgende Notation:

- $\nwarrow$ bei $a_i = b_j$, also $L[i, j] = L[i - 1, j - 1] + 1$
- $\uparrow$ bei $a_i \neq b_j$, für $L[i, j] = L[i - 1, j]$
- $\leftarrow$ bei $a_i \neq b_j$, für $L[i, j] = L[i, j - 1]$ und nicht $\uparrow$

Beispiel

		N	I	E	D	E	R	L	A	N	D	E
D	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E	0	$\uparrow$ 0	$\uparrow$ 0	$\uparrow$ 0	$\nwarrow$ 1	$\leftarrow$ 1	$\leftarrow$ 1	$\leftarrow$ 1	$\leftarrow$ 1	$\nwarrow$ 1	$\leftarrow$ 1	$\leftarrow$ 1
U	0	$\uparrow$ 0	$\uparrow$ 0	$\nwarrow$ 1	$\uparrow$ 1	$\nwarrow$ 2	$\leftarrow$ 2	$\leftarrow$ 2	$\leftarrow$ 2	$\leftarrow$ 2	$\nwarrow$ 2	$\nwarrow$ 2
T	0	$\uparrow$ 0	$\uparrow$ 0	$\uparrow$ 1	$\uparrow$ 1	$\uparrow$ 2	$\uparrow$ 2	$\uparrow$ 2	$\uparrow$ 2	$\uparrow$ 2	$\uparrow$ 2	$\uparrow$ 2
S	0	$\uparrow$ 0	$\uparrow$ 0	$\uparrow$ 1	$\uparrow$ 1	$\uparrow$ 2	$\uparrow$ 2	$\uparrow$ 2	$\uparrow$ 2	$\uparrow$ 2	$\uparrow$ 2	$\uparrow$ 2
C	0	$\uparrow$ 0	$\uparrow$ 0	$\uparrow$ 1	$\uparrow$ 1	$\uparrow$ 2	$\uparrow$ 2	$\uparrow$ 2	$\uparrow$ 2	$\uparrow$ 2	$\uparrow$ 2	$\uparrow$ 2
H	0	$\uparrow$ 0	$\uparrow$ 0	$\uparrow$ 1	$\uparrow$ 1	$\uparrow$ 2	$\uparrow$ 2	$\uparrow$ 2	$\uparrow$ 2	$\uparrow$ 2	$\uparrow$ 2	$\uparrow$ 2
L	0	$\uparrow$ 0	$\uparrow$ 0	$\uparrow$ 1	$\uparrow$ 1	$\uparrow$ 2	$\uparrow$ 2	$\nwarrow$ 3	$\leftarrow$ 3	$\leftarrow$ 3	$\leftarrow$ 3	$\leftarrow$ 3
A	0	$\uparrow$ 0	$\uparrow$ 0	$\uparrow$ 1	$\uparrow$ 1	$\uparrow$ 2	$\uparrow$ 2	$\uparrow$ 3	$\nwarrow$ 4	$\leftarrow$ 4	$\leftarrow$ 4	$\leftarrow$ 4
N	0	$\nwarrow$ 1	$\leftarrow$ 1	$\uparrow$ 1	$\uparrow$ 1	$\uparrow$ 2	$\uparrow$ 2	$\uparrow$ 3	$\uparrow$ 4	$\nwarrow$ 5	$\leftarrow$ 5	$\leftarrow$ 5
D	0	$\uparrow$ 1	$\uparrow$ 1	$\uparrow$ 1	$\nwarrow$ 2	$\uparrow$ 2	$\uparrow$ 2	$\uparrow$ 3	$\uparrow$ 4	$\uparrow$ 5	$\nwarrow$ 6	$\leftarrow$ 6