Datenstrukturen und Algorithmen

Vorlesung 21: Algorithmische Geometrie

Joost-Pieter Katoen

Lehrstuhl für Informatik 2
Software Modeling and Verification Group

http://www-i2.informatik.rwth-aachen.de/i2/dsal10/

20. Juli 2010

Übersicht

Übersicht

Einführung

- Allgemein: Geometrische Probleme im n-dimensionale Raum $\mathbb{R}^n$.

Einführung

- Allgemein: Geometrische Probleme im n-dimensionale Raum $\mathbb{R}^n$.
- Z. B. Schneiden sich zwei Geraden? etc.

 Algorithmische Geometrie

Einführung

- Allgemein: Geometrische Probleme im n-dimensionale Raum $\mathbb{R}^n$.
- Z. B. Schneiden sich zwei Geraden? etc.
- Wir betrachten hier Probleme im zweidimensionalen Raum, also $n = 2$.

Einführung

- Allgemein: Geometrische Probleme im n-dimensionale Raum $\mathbb{R}^n$.
- Z. B. Schneiden sich zwei Geraden? etc.
- Wir betrachten hier Probleme im zweidimensionalen Raum, also $n = 2$.
- Dazu nutzen wir Konzepte aus der Linearen Algebra.

Algorithmische Geometrie

Einführung

- Allgemein: Geometrische Probleme im n-dimensionale Raum $\mathbb{R}^n$.
- Z. B. Schneiden sich zwei Geraden? etc.
- Wir betrachten hier Probleme im zweidimensionalen Raum, also $n = 2$.
- Dazu nutzen wir Konzepte aus der Linearen Algebra.
- Anwendungen: Computergraphik, CAD, Robotertechnik, usw.

Mathematische Hilfsmittel

Vektor, Skalarprodukt, Betrag, Determinante

Mathematische Hilfsmittel

Vektor, Skalarprodukt, Betrag, Determinante

- Vektor (im $\mathbb{R}^n$, insbesondere $n = 2$): $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

Mathematische Hilfsmittel

Vektor, Skalarprodukt, Betrag, Determinante

- Vektor (im $\mathbb{R}^n$, insbesondere $n = 2$): $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.
- Skalarprodukt (Dot Product) von $\vec{x}$ und $\vec{y}$:
  $\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2$.

Mathematische Hilfsmittel

Vektor, Skalarprodukt, Betrag, Determinante

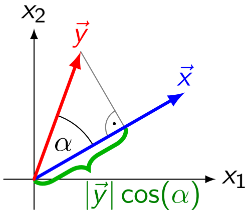
- Vektor (im $\mathbb{R}^n$, insbesondere $n = 2$): $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.
- Skalarprodukt (Dot Product) von $\vec{x}$ und $\vec{y}$:
  $\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2$.
- Betrag (Länge) von $\vec{x}$: $|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Mathematische Hilfsmittel

Vektor, Skalarprodukt, Betrag, Determinante

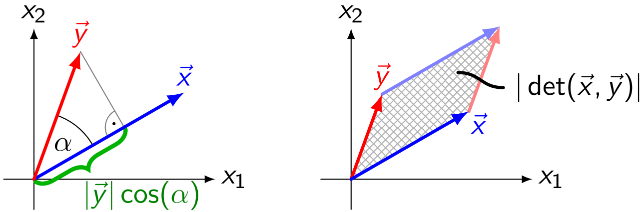
- Vektor (im $\mathbb{R}^n$, insbesondere $n = 2$): $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.
- Skalarprodukt (Dot Product) von $\vec{x}$ und $\vec{y}$:
  $\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2$.
- Betrag (Länge) von $\vec{x}$: $|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.
- Determinante für $[\vec{x}, \vec{y}] = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} =: A$:
  $\det A = \det(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_2 - x_2 y_1$.

Geometrische Interpretation



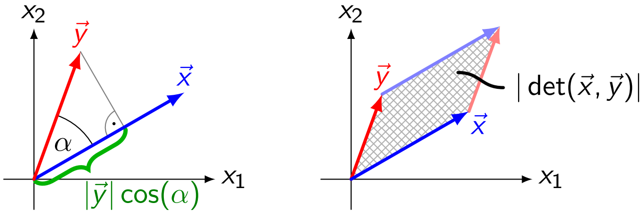
- Es gilt: $\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}| \cos(\alpha)$. („Länge der Projektion“).

Geometrische Interpretation



- Es gilt: $\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}| \cos(\alpha)$. („Länge der Projektion“).
- Die Fläche (allgemein: Volumen) des durch $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespannten Parallelogramms ist gerade der Absolutwert der Determinanten.

Geometrische Interpretation

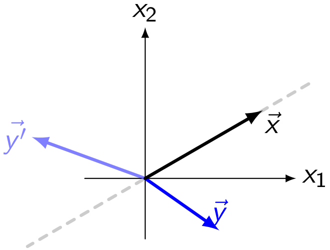


- Es gilt: $\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}|\cos(\alpha)$. („Länge der Projektion“).
- Die Fläche (allgemein: Volumen) des durch $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespannten Parallelogramms ist gerade der Absolutwert der Determinanten. Oder: Die Determinante liefert eine vorzeichenbehaftete Fläche.

Winkelbestimmung (I)

Problem

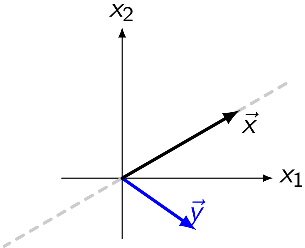
Liegt ein Vektor $\vec{y}$ links oder rechts von einem gegeben Vektor $\vec{x}$?



Winkelbestimmung (I)

Problem

Liegt ein Vektor $\vec{y}$ links oder rechts von einem gegeben Vektor $\vec{x}$?

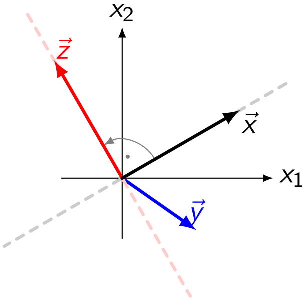


- Wir betrachten zunächst $\vec{y}$.

Winkelbestimmung (I)

Problem

Liegt ein Vektor $\vec{y}$ links oder rechts von einem gegeben Vektor $\vec{x}$?

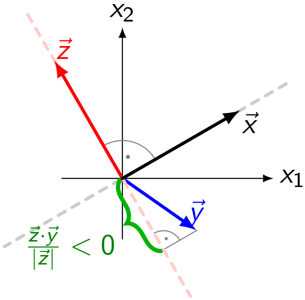


- Wir betrachten zunächst $\vec{y}$.
- Konstruiere $\vec{z}$, den zu $\vec{x}$ im mathematisch positiven Sinn (Gegenuhrzeigersinn) um 90 Grad gedrehten Vektor.

Winkelbestimmung (I)

Problem

Liegt ein Vektor $\vec{y}$ links oder rechts von einem gegeben Vektor $\vec{x}$?

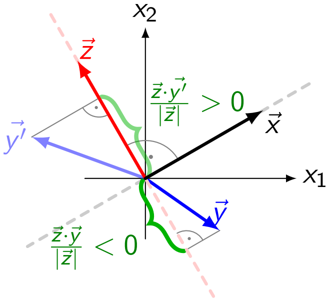


- Wir betrachten zunächst $\vec{y}$.
- Konstruiere $\vec{z}$, den zu $\vec{x}$ im mathematisch positiven Sinn (Gegenuhrzeigersinn) um 90 Grad gedrehten Vektor.
- Projeziere $\vec{y}$ auf $\vec{z}$. Da $\vec{y}$ rechts von $\vec{x}$ liegt und damit von $\vec{z}$ wegzeigt, ist $\vec{z}\cdot\vec{y}$ negativ.

Winkelbestimmung (I)

Problem

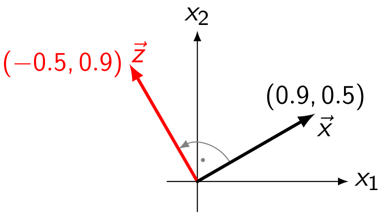
Liegt ein Vektor $\vec{y}$ links oder rechts von einem gegeben Vektor $\vec{x}$?



- Wir betrachten zunächst $\vec{y}$.
- Konstruiere $\vec{z}$, den zu $\vec{x}$ im mathematisch positiven Sinn (Gegenuhrzeigersinn) um 90 Grad gedrehten Vektor.
- Projeziere $\vec{y}$ auf $\vec{z}$. Da $\vec{y}$ rechts von $\vec{x}$ liegt und damit von $\vec{z}$ wegzeigt, ist $\vec{z}\cdot\vec{y}$ negativ.
- $\vec{y'}$ dagegen liegt links von $\vec{x}$, daher ist $\vec{z}\cdot\vec{y'}$ positiv.

Winkelbestimmung (II)

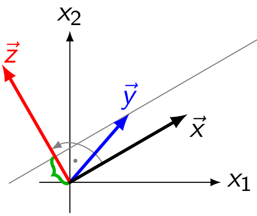
Wie berechnet sich aber $\vec{z}$ aus $\vec{x}$?



- Für $\vec{x} = (x_1, x_2)$ ist $\vec{z}$ gerade $(-x_2, x_1)$.

Winkelbestimmung (II)

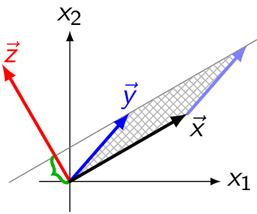
Wie berechnet sich aber $\vec{z}$ aus $\vec{x}$?



- Für $\vec{x} = (x_1, x_2)$ ist $\vec{z}$ gerade $(-x_2, x_1)$.
- Insgesamt ist damit $\vec{z} \cdot \vec{y} = z_1 y_1 + z_2 y_2 = -x_2 y_1 + x_1 y_2$

Winkelbestimmung (II)

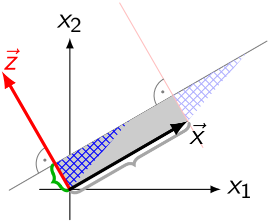
Wie berechnet sich aber $\vec{z}$ aus $\vec{x}$?



- Für $\vec{x} = (x_1, x_2)$ ist $\vec{z}$ gerade $(-x_2, x_1)$.
- Insgesamt ist damit $\vec{z} \cdot \vec{y} = z_1 y_1 + z_2 y_2 = -x_2 y_1 + x_1 y_2 = \det(\vec{x}, \vec{y})$.

Winkelbestimmung (II)

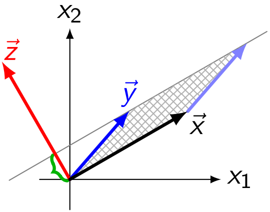
Wie berechnet sich aber $\vec{z}$ aus $\vec{x}$?



- Für $\vec{x} = (x_1, x_2)$ ist $\vec{z}$ gerade $(-x_2, x_1)$.
- Insgesamt ist damit $\vec{z} \cdot \vec{y} = z_1 y_1 + z_2 y_2 = -x_2 y_1 + x_1 y_2 = \det(\vec{x}, \vec{y})$.

Winkelbestimmung (II)

Wie berechnet sich aber $\vec{z}$ aus $\vec{x}$?



- Für $\vec{x} = (x_1, x_2)$ ist $\vec{z}$ gerade $(-x_2, x_1)$.
- Insgesamt ist damit $\vec{z} \cdot \vec{y} = z_1 y_1 + z_2 y_2 = -x_2 y_1 + x_1 y_2 = \det(\vec{x}, \vec{y})$.
- Ist $\det(\vec{x}, \vec{y}) = 0$, dann sind $\vec{x}$ und $\vec{y}$ parallel (bzw. antiparallel).

Strecken

Punkt, Strecke, Polygon

Strecken

Punkt, Strecke, Polygon

- Punkte aus dem $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = (p_1, p_2)$.

Strecken

Punkt, Strecke, Polygon

- Punkte aus dem $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = (p_1, p_2)$.
- Der Punkt (0,0) heißt Ursprung.

Strecken

Punkt, Strecke, Polygon

- Punkte aus dem $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = (p_1, p_2)$.
- Der Punkt (0,0) heißt Ursprung.
- Mit dem Vektor $\vec{d}_{pq} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$ kommt man dann von $\mathbf{p}$ nach $\mathbf{q}$.

Strecken

Punkt, Strecke, Polygon

- Punkte aus dem $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = (p_1, p_2)$.
- Der Punkt $(0{,}0)$ heißt Ursprung.
- Mit dem Vektor $\vec{d}_{pq} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$ kommt man dann von $\mathbf{p}$ nach $\mathbf{q}$.
- Die (ungerichtete) Strecke $\overline{\mathbf{pq}}$ ist die Menge alle Punkte zwischen den beiden Endpunkten $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ (Konvexkombination):

Strecken

Punkt, Strecke, Polygon

- Punkte aus dem $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = (p_1, p_2)$.
- Der Punkt (0,0) heißt Ursprung.
- Mit dem Vektor $\vec{d}_{pq} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$ kommt man dann von $\mathbf{p}$ nach $\mathbf{q}$.
- Die (ungerichtete) Strecke $\overline{\mathbf{pq}}$ ist die Menge alle Punkte zwischen den beiden Endpunkten $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ (Konvexkombination):
  $\overline{\mathbf{pq}} = \{\, (1-\alpha) \cdot \mathbf{p} + \alpha \cdot \mathbf{q} \mid 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \,\} = \{\, \mathbf{p} + \alpha \cdot \vec{d} \mid 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \,\}$.

Strecken

Punkt, Strecke, Polygon

- Punkte aus dem $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = (p_1, p_2)$.
- Der Punkt (0,0) heißt Ursprung.
- Mit dem Vektor $\vec{d}_{pq} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$ kommt man dann von $\mathbf{p}$ nach $\mathbf{q}$.
- Die (ungerichtete) Strecke $\overline{\mathbf{pq}}$ ist die Menge alle Punkte zwischen den beiden Endpunkten $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ (Konvexkombination):
  $\overline{\mathbf{pq}} = \{\, (1-\alpha) \cdot \mathbf{p} + \alpha \cdot \mathbf{q} \mid 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \,\} = \{\, \mathbf{p} + \alpha \cdot \vec{d} \mid 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \,\}$.
- Fasst man $\overrightarrow{\mathbf{pq}}$ als gerichtete Strecke auf, so ist $\vec{d}_{pq}$ die Richtung.

Strecken

Punkt, Strecke, Polygon

- Punkte aus dem $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = (p_1, p_2)$.
- Der Punkt (0,0) heißt Ursprung.
- Mit dem Vektor $\vec{d}_{pq} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$ kommt man dann von $\mathbf{p}$ nach $\mathbf{q}$.
- Die (ungerichtete) Strecke $\overline{\mathbf{pq}}$ ist die Menge alle Punkte zwischen den beiden Endpunkten $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ (Konvexkombination):
  $\overline{\mathbf{pq}} = \{ (1-\alpha) \cdot \mathbf{p} + \alpha \cdot \mathbf{q} \mid 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \} = \{ \mathbf{p} + \alpha \cdot \vec{d} \mid 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \}$.
- Fasst man $\overrightarrow{\mathbf{pq}}$ als gerichtete Strecke auf, so ist $\vec{d}_{pq}$ die Richtung.
- Eine Streckenzug ist eine Folge von Punkten $(\mathbf{p_1}, \ldots, \mathbf{p_n})$, die durch Strecken miteinander verbunden sind: $\overline{\mathbf{p_1 p_2}}, \overline{\mathbf{p_2 p_3}}, \ldots, \overline{\mathbf{p_{n-1} p_n}}$.

Strecken

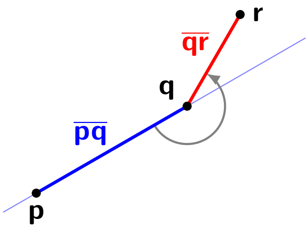
Punkt, Strecke, Polygon

- Punkte aus dem $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = (p_1, p_2)$.
- Der Punkt (0,0) heißt Ursprung.
- Mit dem Vektor $\vec{d}_{pq} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$ kommt man dann von $\mathbf{p}$ nach $\mathbf{q}$.
- Die (ungerichtete) Strecke $\overline{\mathbf{pq}}$ ist die Menge alle Punkte zwischen den beiden Endpunkten $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ (Konvexkombination):
  $\overline{\mathbf{pq}} = \{ (1-\alpha) \cdot \mathbf{p} + \alpha \cdot \mathbf{q} \mid 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \} = \{ \mathbf{p} + \alpha \cdot \vec{d} \mid 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \}$.
- Fasst man $\overrightarrow{\mathbf{pq}}$ als gerichtete Strecke auf, so ist $\vec{d}_{pq}$ die Richtung.
- Eine Streckenzug ist eine Folge von Punkten $(\mathbf{p_1}, \ldots, \mathbf{p_n})$, die durch Strecken miteinander verbunden sind: $\overline{\mathbf{p_1 p_2}}, \overline{\mathbf{p_2 p_3}}, \ldots, \overline{\mathbf{p_{n-1} p_n}}$.
- Ein Polygon mit den Ecken $\mathbf{p_1}, \ldots, \mathbf{p_n}$ hat als Rand gerade den *geschlossenen* Streckenzug $(\mathbf{p_1}, \ldots, \mathbf{p_n}, \mathbf{p_1})$.

Winkelbestimmung (III)

Problem

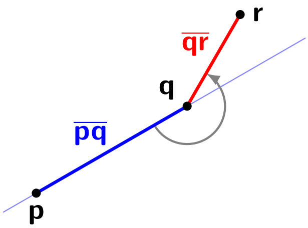
Gegeben der Streckenzug $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r})$. *Wird bei* **q** *nach links oder rechts abgebogen? Oder: Ist der Winkel* $\measuredangle \mathbf{pqr} > 180^\circ$ *oder* $< 180^\circ$*?*



Winkelbestimmung (III)

Problem

Gegeben der Streckenzug $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r})$. *Wird bei* $\mathbf{q}$ *nach links oder rechts abgebogen? Oder: Ist der Winkel* $\measuredangle\mathbf{pqr} > 180^\circ$ *oder* $< 180^\circ$*?*

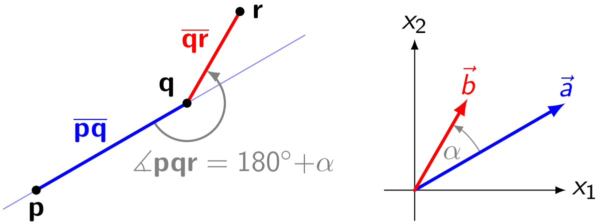


- Wir verwenden wieder die Determinante.

Winkelbestimmung (III)

Problem

Gegeben der Streckenzug $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r})$. *Wird bei* $\mathbf{q}$ *nach links oder rechts abgebogen? Oder: Ist der Winkel* $\measuredangle\mathbf{pqr} > 180^\circ$ *oder* $< 180^\circ$ *?*

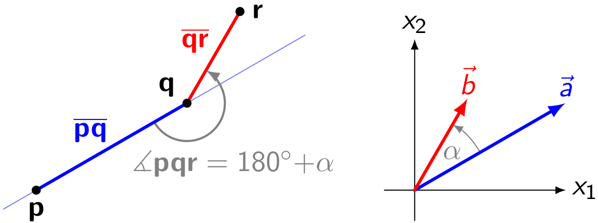


- Wir verwenden wieder die Determinante.
- Dazu berechnen wir $\vec{a} = \vec{d}_{pq} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$ und $\vec{b} = \vec{d}_{qr} = \mathbf{r} - \mathbf{q}$.

Winkelbestimmung (III)

Problem

Gegeben der Streckenzug $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r})$. *Wird bei* $\mathbf{q}$ *nach links oder rechts abgebogen? Oder: Ist der Winkel* $\measuredangle\mathbf{pqr} > 180°$ *oder* $< 180°$*?*

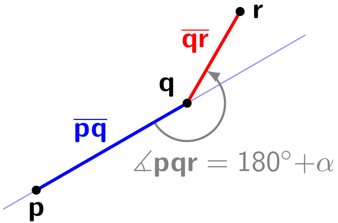


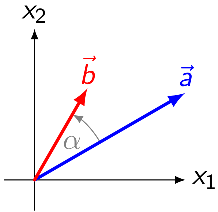
- Wir verwenden wieder die Determinante.
- Dazu berechnen wir $\vec{a} = \vec{d}_{pq} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$ und $\vec{b} = \vec{d}_{qr} = \mathbf{r} - \mathbf{q}$.
- $\det(\vec{a}, \vec{b}) > 0$, falls der Knick nach links geht ($\measuredangle\mathbf{pqr} > 180°$, $\alpha > 0$).

Winkelbestimmung (III)

Problem

Gegeben der Streckenzug $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r})$. *Wird bei* $\mathbf{q}$ *nach links oder rechts abgebogen? Oder: Ist der Winkel* $\measuredangle\mathbf{pqr} > 180°$ *oder* $< 180°$*?*



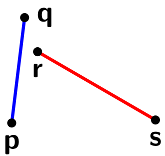


- Wir verwenden wieder die Determinante.
- Dazu berechnen wir $\vec{a} = \vec{d}_{pq} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$ und $\vec{b} = \vec{d}_{qr} = \mathbf{r} - \mathbf{q}$.
- $\det(\vec{a}, \vec{b}) > 0$, falls der Knick nach links geht ($\measuredangle\mathbf{pqr} > 180°$, $\alpha > 0$).
- Wenn $\mathbf{r}$ auf (der Verlängerung von) $\overline{\mathbf{pq}}$ liegt, dann ist $\det(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ ($\measuredangle\mathbf{pqr} = 0°$ oder $= 180°$).

Schnitt zweier Strecken

Problem

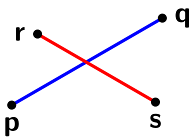
Gegeben zwei Strecken $\overline{\mathbf{pq}}$ *und* $\overline{\mathbf{rs}}$. *Schneiden sich diese?*



Schnitt zweier Strecken

Problem

Gegeben zwei Strecken $\overline{\mathbf{pq}}$ *und* $\overline{\mathbf{rs}}$*. Schneiden sich diese?*

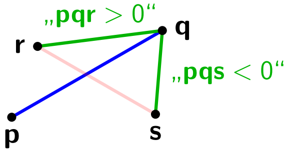


- Wir sind nicht an der Position des Schnittpunktes interessiert.

Schnitt zweier Strecken

Problem

Gegeben zwei Strecken $\overline{\mathbf{pq}}$ und $\overline{\mathbf{rs}}$. Schneiden sich diese?

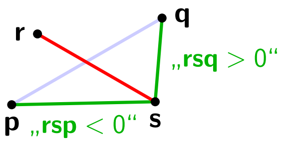


- Wir sind nicht an der Position des Schnittpunktes interessiert.
- Idee: Wir testen, ob die Endpunkte **r** und **s** auf verschiedenen Seiten von $\overline{\mathbf{pq}}$ liegen.

Schnitt zweier Strecken

Problem

Gegeben zwei Strecken $\overline{\mathbf{pq}}$ *und* $\overline{\mathbf{rs}}$*. Schneiden sich diese?*

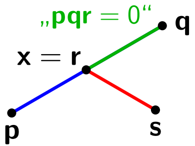


- Wir sind nicht an der Position des Schnittpunktes interessiert.
- Idee: Wir testen, ob die Endpunkte **r** und **s** auf verschiedenen Seiten von $\overline{\mathbf{pq}}$ liegen. Ebenso für **p** und **q** bezüglich $\overline{\mathbf{rs}}$.

Schnitt zweier Strecken

Problem

Gegeben zwei Strecken $\overline{\mathbf{pq}}$ *und* $\overline{\mathbf{rs}}$*. Schneiden sich diese?*



- Wir sind nicht an der Position des Schnittpunktes interessiert.
- Idee: Wir testen, ob die Endpunkte **r** und **s** auf verschiedenen Seiten von $\overline{\mathbf{pq}}$ liegen. Ebenso für **p** und **q** bezüglich $\overline{\mathbf{rs}}$.
- Sonderfall: $\det = 0$. Der Endpunkt, etwa **x**, liegt also auf der Verlängerung von $\overline{\mathbf{pq}}$ (bzw. $\overline{\mathbf{rs}}$).
  Es bleibt zu prüfen, ob **x** auch zwischen **p** und **q** liegt.

Schnitt zweier Strecken – Algorithmus (I)

```
float det(float a[2], float b[2]) {
  return a[0]*b[1] - a[1]*b[0];
}

// Richtung des Knicks zwischen pq und qr?
float direction(float p[2], float q[2], float r[2]) {
  float a[2] = {q[0]-p[0], q[1]-p[1]}; // q-p
  float b[2] = {r[0]-q[0], r[1]-q[1]}; // r-q
  return det(a,b);
}

// Vorbedingung: x liegt auf (der Verlängerung von) pq.
// Teste, ob x auch zwischen p und q liegt.
bool onSegment(float p[2], float q[2], float x[2]) {
  float topright[2] = {max(p[0],q[0]), max(p[1],q[1])};
  float botleft[2] = {min(p[0],q[0]), min(p[1],q[1])};
  // return (botleft <= x <= topright);
  return (x[0] <= topright[0])&&(x[1] <= topright[1])&&
         (botleft[0] <= x[0])&&(botleft[1] <= x[1]);
}
```

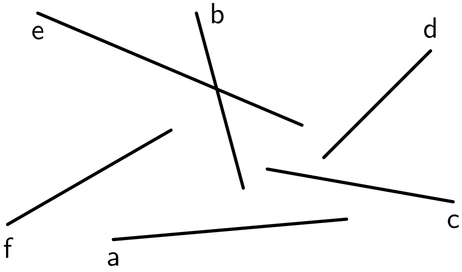
Schnitt zweier Strecken – Algorithmus (II)

```
// Testet, ob pq und rs sich schneiden
bool segIntersect(float p[2], float q[2],
                        float r[2], float s[2]) {
  float d1 = direction(p,q,r), d2 = direction(p,q,s);
  // liegt r bzw. s auf pq?
  if (d1 == 0 && onSegment(p,q,r)) return true;
  if (d2 == 0 && onSegment(p,q,s)) return true;
  // r und s auf der selben Seite von pq?
  if ((d1 > 0 && d2 > 0) || (d1 < 0 && d2 < 0)) return false;

  float d3 = direction(r,s,p), d4 = direction(r,s,q);
  // liegt p bzw. q auf rs?
  if (d3 == 0 && onSegment(r,s,p)) return true;
  if (d4 == 0 && onSegment(r,s,q)) return true;
  // p und q auf der selben Seite von rs?
  if ((d3 > 0 && d4 > 0) || (d3 < 0 && d4 < 0)) return false;
  return true;
}
```

Übersicht

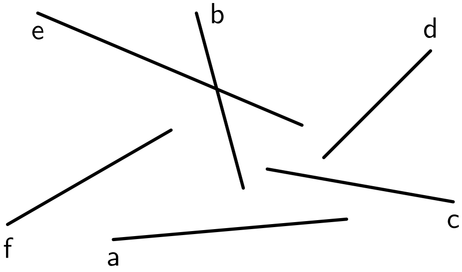
Schnitt eines beliebigen Streckenpaares



Problem

Gegeben seinen n Strecken. Gibt es einen Schnitt zwischen zwei dieser Strecken?

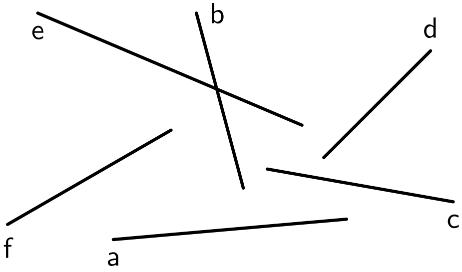
Schnitt eines beliebigen Streckenpaares



Problem

Gegeben seinen n Strecken. Gibt es einen Schnitt zwischen zwei dieser Strecken? Lässt sich die Frage schneller als $O(n^2)$ beantworten?

Schnitt eines beliebigen Streckenpaares



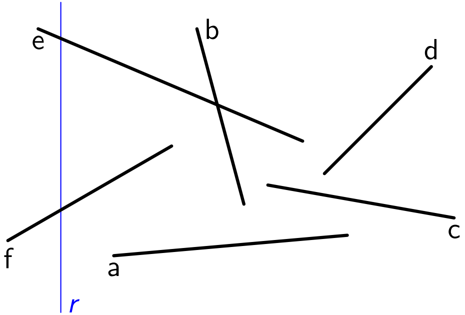
Problem

Gegeben seinen n Strecken. Gibt es einen Schnitt zwischen zwei dieser Strecken? Lässt sich die Frage schneller als $O(n^2)$ beantworten?

Annahmen

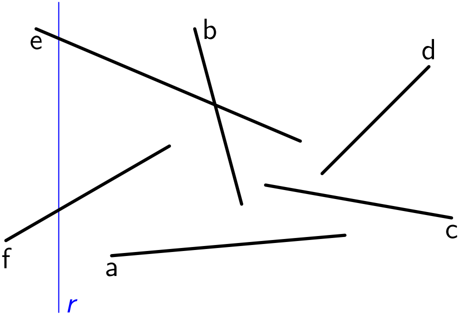
- Wir lassen keine vertikalen Strecken zu.
- Es schneiden sich nicht mehr als zwei Strecken im selben Punkt.

Ordnen von Strecken



Vergleichbarkeit

Ordnen von Strecken

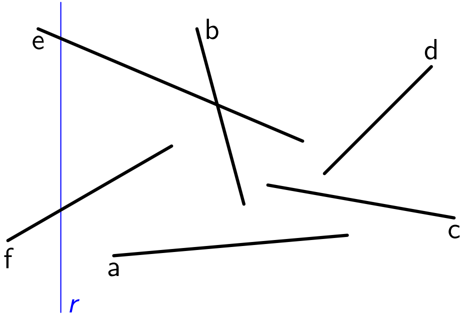


Vergleichbarkeit

Zwei Strecken s_1 und s_2 heißen vergleichbar an der Stelle r, wenn beide die vertikale Linie mit x_1-Koordinate $= r$ schneiden.

- Wenn s_1 an der Stelle r über s_2 liegt schreiben wir $s_1 >_r s_2$, sonst $s_2 >_r s_1$, bzw. $s_1 =_r s_2$.

Ordnen von Strecken



Beispiel

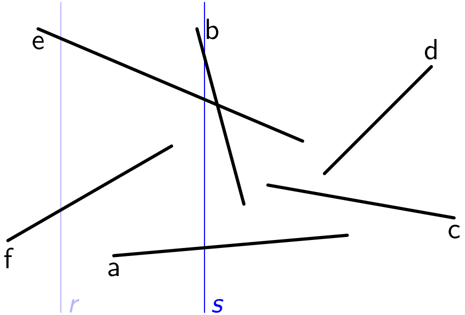
- e $>_r$ f; sowie f mit a nicht vergleichbar bei r (usw.).

Vergleichbarkeit

Zwei Strecken s_1 und s_2 heißen vergleichbar an der Stelle r, wenn beide die vertikale Linie mit x_1-Koordinate $= r$ schneiden.

- Wenn s_1 an der Stelle r über s_2 liegt schreiben wir $s_1 >_r s_2$, sonst $s_2 >_r s_1$, bzw. $s_1 =_r s_2$.

Ordnen von Strecken



Beispiel

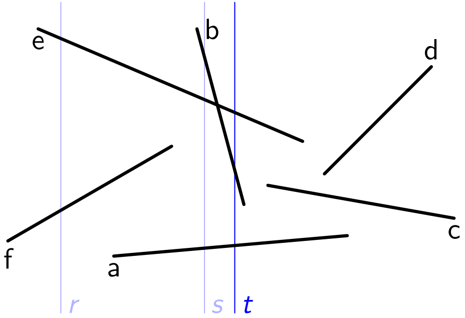
- e $>_r$ f; sowie f mit a nicht vergleichbar bei r (usw.).
- b $>_s$ a, e $>_s$ a, b $>_s$ e.

Vergleichbarkeit

Zwei Strecken s_1 und s_2 heißen vergleichbar an der Stelle r, wenn beide die vertikale Linie mit x_1-Koordinate $= r$ schneiden.

- Wenn s_1 an der Stelle r über s_2 liegt schreiben wir $s_1 >_r s_2$, sonst $s_2 >_r s_1$, bzw. $s_1 =_r s_2$.

Ordnen von Strecken



Beispiel

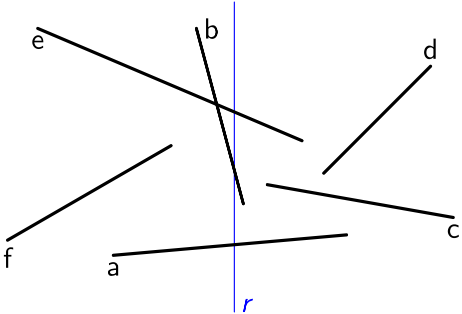
- e $>_r$ f; sowie f mit a nicht vergleichbar bei r (usw.).
- b $>_s$ a, e $>_s$ a, b $>_s$ e.
- b $>_t$ a, e $>_t$ a, e $>_t$ b. (Der Schnitt vertauscht die Reihenfolge von e und b).

Vergleichbarkeit

Zwei Strecken s_1 und s_2 heißen vergleichbar an der Stelle r, wenn beide die vertikale Linie mit x_1-Koordinate $= r$ schneiden.

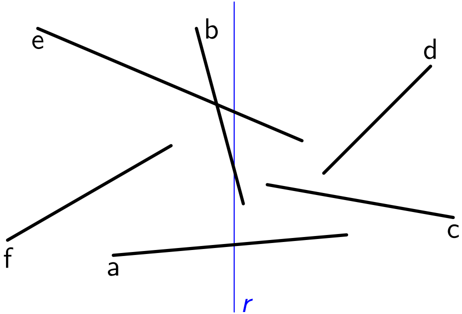
- Wenn s_1 an der Stelle r über s_2 liegt schreiben wir $s_1 >_r s_2$, sonst $s_2 >_r s_1$, bzw. $s_1 =_r s_2$.

Wie ordnet man Strecken? (I)



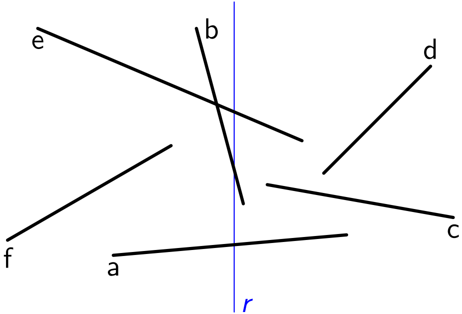
- Für beliebige r: Gar nicht . . . .

Wie ordnet man Strecken? (I)



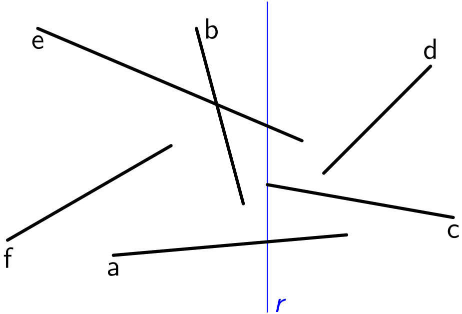
- Für beliebige r: Gar nicht . . . . Allerdings:

Wie ordnet man Strecken? (I)



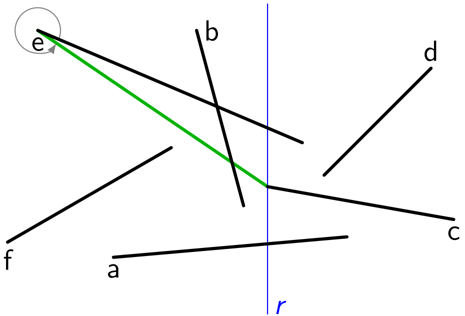
- Für beliebige r: Gar nicht .... Allerdings:
- Beobachtung 1: Die Ordnung kann sich nur ändern, wenn eine Strecke hinzukommt (vergleichbar wird) bzw. herausfällt, oder wenn sich zwei Strecken schneiden.

Wie ordnet man Strecken? (I)



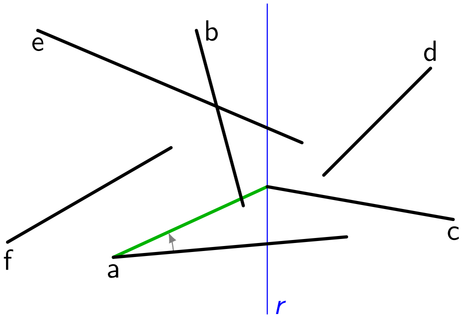
- Für beliebige r: Gar nicht . . . . Allerdings:
- Beobachtung 1: Die Ordnung kann sich nur ändern, wenn eine Strecke hinzukommt (vergleichbar wird) bzw. herausfällt, oder wenn sich zwei Strecken schneiden.
- Beobachtung 2: Für den linken Endpunkt einer hinzukommenden Strecke lässt sich mit der Determinante bestimmen, ob er über oder unter einer an dieser Stelle vergleichbaren Strecke liegt.

Wie ordnet man Strecken? (I)



- Für beliebige r: Gar nicht .... Allerdings:
- Beobachtung 1: Die Ordnung kann sich nur ändern, wenn eine Strecke hinzukommt (vergleichbar wird) bzw. herausfällt, oder wenn sich zwei Strecken schneiden.
- Beobachtung 2: Für den linken Endpunkt einer hinzukommenden Strecke lässt sich mit der Determinante bestimmen, ob er über oder unter einer an dieser Stelle vergleichbaren Strecke liegt.

Wie ordnet man Strecken? (I)



- Für beliebige r: Gar nicht . . . . Allerdings:
- Beobachtung 1: Die Ordnung kann sich nur ändern, wenn eine Strecke hinzukommt (vergleichbar wird) bzw. herausfällt, oder wenn sich zwei Strecken schneiden.
- Beobachtung 2: Für den linken Endpunkt einer hinzukommenden Strecke lässt sich mit der Determinante bestimmen, ob er über oder unter einer an dieser Stelle vergleichbaren Strecke liegt.

Wie ordnet man Strecken? (II)

- Insbesondere lässt sich so ein Endpunkt, und damit die Strecke, in eine gegebenen Ordnung von Strecken einsortieren.

Wie ordnet man Strecken? (II)

- Insbesondere lässt sich so ein Endpunkt, und damit die Strecke, in eine gegebenen Ordnung von Strecken einsortieren.
- Hält man die Ordnung in einem balanciertem Binärbaum vor (Details später), dann benötigt man bei n Strecken $\Theta(n \log n)$ Operationen.

Wie ordnet man Strecken? (II)

- Insbesondere lässt sich so ein Endpunkt, und damit die Strecke, in eine gegebenen Ordnung von Strecken einsortieren.
- Hält man die Ordnung in einem balanciertem Binärbaum vor (Details später), dann benötigt man bei n Strecken $\Theta(n \log n)$ Operationen.

Das führt zur Idee der Sweepline:

Wie ordnet man Strecken? (II)

- Insbesondere lässt sich so ein Endpunkt, und damit die Strecke, in eine gegebenen Ordnung von Strecken einsortieren.
- Hält man die Ordnung in einem balanciertem Binärbaum vor (Details später), dann benötigt man bei n Strecken $\Theta(n \log n)$ Operationen.

Das führt zur Idee der Sweepline:

- Wir wandern von links nach rechts über die Ebene und fügen die Strecken unserer Ordnung hinzu, bzw. entfernen sie beim Passieren der jeweiligen Endpunkte.

Wie ordnet man Strecken? (II)

- Insbesondere lässt sich so ein Endpunkt, und damit die Strecke, in eine gegebenen Ordnung von Strecken einsortieren.
- Hält man die Ordnung in einem balanciertem Binärbaum vor (Details später), dann benötigt man bei n Strecken $\Theta(n \log n)$ Operationen.

Das führt zur Idee der Sweepline:

- Wir wandern von links nach rechts über die Ebene und fügen die Strecken unserer Ordnung hinzu, bzw. entfernen sie beim Passieren der jeweiligen Endpunkte.
- So können wir für jede Position die Ordnung angeben, solange wir Schnitte erkennen.

Wie ordnet man Strecken? (II)

- Insbesondere lässt sich so ein Endpunkt, und damit die Strecke, in eine gegebenen Ordnung von Strecken einsortieren.
- Hält man die Ordnung in einem balanciertem Binärbaum vor (Details später), dann benötigt man bei n Strecken $\Theta(n \log n)$ Operationen.

Das führt zur Idee der Sweepline:

- Wir wandern von links nach rechts über die Ebene und fügen die Strecken unserer Ordnung hinzu, bzw. entfernen sie beim Passieren der jeweiligen Endpunkte.
- So können wir für jede Position die Ordnung angeben, solange wir Schnitte erkennen.
- Da sich schneidende Linien immer zunächst in der Ordnung benachbart sind, brauchen wir nun, für eine hinzukommende oder verlassende Strecke, nur die beiden benachbarten Strecken direkt ober- und unterhalb unseres Endpunktes auf etwaige Schnitte testen.

Sweepline-Algorithmen

Ein Sweepline-Algorithmus verwaltet gewöhnlich zwei Datenmengen:

Sweepline-Algorithmen

Ein Sweepline-Algorithmus verwaltet gewöhnlich zwei Datenmengen:

Sweepline-Status:

Gibt die Beziehung zwischen den von der Sweepline geschnittenen Objekten an.

Sweepline-Algorithmen

Ein Sweepline-Algorithmus verwaltet gewöhnlich zwei Datenmengen:

Sweepline-Status:
: Gibt die Beziehung zwischen den von der Sweepline geschnittenen Objekten an.

Ereignisliste:
: Eine Liste, in der die Ereignispunkte sortiert aufgelistet sind. Nur an diesen hält die Sweepline an, da sich der Status nur an solchen ändern kann.

Sweepline-Algorithmen

Ein Sweepline-Algorithmus verwaltet gewöhnlich zwei Datenmengen:

Sweepline-Status:
: Gibt die Beziehung zwischen den von der Sweepline geschnittenen Objekten an.

Ereignisliste:
: Eine Liste, in der die Ereignispunkte sortiert aufgelistet sind.
Nur an diesen hält die Sweepline an, da sich der Status nur an solchen ändern kann.

- Je nach Anwendung kann die Ereignisliste schon im voraus bestimmt (und sortiert) werden (statische Ereignisliste), oder aber sie entsteht erst beim Durchlauf (dynamische Ereignisliste).

Sweepline-Algorithmen

Ein Sweepline-Algorithmus verwaltet gewöhnlich zwei Datenmengen:

Sweepline-Status:
: Gibt die Beziehung zwischen den von der Sweepline geschnittenen Objekten an.

Ereignisliste:
: Eine Liste, in der die Ereignispunkte sortiert aufgelistet sind. Nur an diesen hält die Sweepline an, da sich der Status nur an solchen ändern kann.

- Je nach Anwendung kann die Ereignisliste schon im voraus bestimmt (und sortiert) werden (statische Ereignisliste), oder aber sie entsteht erst beim Durchlauf (dynamische Ereignisliste).
- Dynamische Ereignisliste können z. B. mit binären Suchbäumen effizient implementiert werden.

Schnitt eines beliebigen Streckenpaares – Sweepline

Für den Schnitt eines beliebigen Streckenpaares heißt das:

Schnitt eines beliebigen Streckenpaares – Sweepline

Für den Schnitt eines beliebigen Streckenpaares heißt das:

Sweepline-Status:

$\Rightarrow$ Die Ordnung der Strecken an der aktuellen Position der Sweepline.

Schnitt eines beliebigen Streckenpaares – Sweepline

Für den Schnitt eines beliebigen Streckenpaares heißt das:

Sweepline-Status:

$\Rightarrow$ Die Ordnung der Strecken an der aktuellen Position der Sweepline.

- In die Ordnung müssen hinzukommende Strecken eingefügt werden, verlassende Strecken gelöscht werden.

Schnitt eines beliebigen Streckenpaares – Sweepline

Für den Schnitt eines beliebigen Streckenpaares heißt das:

Sweepline-Status:

$\Rightarrow$ Die Ordnung der Strecken an der aktuellen Position der Sweepline.

- In die Ordnung müssen hinzukommende Strecken eingefügt werden, verlassende Strecken gelöscht werden.
- Außerdem benötigen wir Operationen, um die direkt über und unter einer Strecke liegende Strecke zu erhalten, da (nur) zwischen solchen auf Schnitt geprüft wird.

Schnitt eines beliebigen Streckenpaares – Sweepline

Für den Schnitt eines beliebigen Streckenpaares heißt das:

Sweepline-Status:

$\Rightarrow$ Die Ordnung der Strecken an der aktuellen Position der Sweepline.

- In die Ordnung müssen hinzukommende Strecken eingefügt werden, verlassende Strecken gelöscht werden.
- Außerdem benötigen wir Operationen, um die direkt über und unter einer Strecke liegende Strecke zu erhalten, da (nur) zwischen solchen auf Schnitt geprüft wird.
- Etwa RBTs implementieren diesen dynamischen, sortierten ADT.

Schnitt eines beliebigen Streckenpaares – Sweepline

Für den Schnitt eines beliebigen Streckenpaares heißt das:

Sweepline-Status:

$\Rightarrow$ Die Ordnung der Strecken an der aktuellen Position der Sweepline.

- In die Ordnung müssen hinzukommende Strecken eingefügt werden, verlassende Strecken gelöscht werden.
- Außerdem benötigen wir Operationen, um die direkt über und unter einer Strecke liegende Strecke zu erhalten, da (nur) zwischen solchen auf Schnitt geprüft wird.
- Etwa RBTs implementieren diesen dynamischen, sortierten ADT.
- „Unter“ und „Über“ entspricht dem Nachfolger (`bstSucc`) und dem Vorgänger (analog: `bstPred`).

Schnitt eines beliebigen Streckenpaares – Sweepline

Für den Schnitt eines beliebigen Streckenpaares heißt das:

Sweepline-Status:

$\Rightarrow$ Die Ordnung der Strecken an der aktuellen Position der Sweepline.

- In die Ordnung müssen hinzukommende Strecken eingefügt werden, verlassende Strecken gelöscht werden.
- Außerdem benötigen wir Operationen, um die direkt über und unter einer Strecke liegende Strecke zu erhalten, da (nur) zwischen solchen auf Schnitt geprüft wird.
- Etwa RBTs implementieren diesen dynamischen, sortierten ADT.
- „Unter“ und „Über“ entspricht dem Nachfolger (`bstSucc`) und dem Vorgänger (analog: `bstPred`).

Ereignisliste:

- Ereignispunkte sind alle Endpunkte der Strecken.

Schnitt eines beliebigen Streckenpaares – Sweepline

Für den Schnitt eines beliebigen Streckenpaares heißt das:

Sweepline-Status:

$\Rightarrow$ Die Ordnung der Strecken an der aktuellen Position der Sweepline.

- In die Ordnung müssen hinzukommende Strecken eingefügt werden, verlassende Strecken gelöscht werden.
- Außerdem benötigen wir Operationen, um die direkt über und unter einer Strecke liegende Strecke zu erhalten, da (nur) zwischen solchen auf Schnitt geprüft wird.
- Etwa RBTs implementieren diesen dynamischen, sortierten ADT.
- „Unter“ und „Über“ entspricht dem Nachfolger (`bstSucc`) und dem Vorgänger (analog: `bstPred`).

Ereignisliste:

- Ereignispunkte sind alle Endpunkte der Strecken.
  Diese sind bereits im Vorfeld bekannt.

Schnitt eines beliebigen Streckenpaares – Sweepline

Für den Schnitt eines beliebigen Streckenpaares heißt das:

Sweepline-Status:

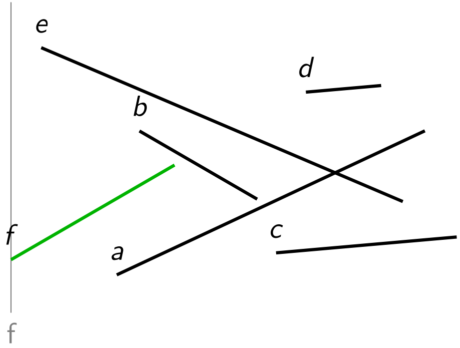
$\Rightarrow$ Die Ordnung der Strecken an der aktuellen Position der Sweepline.

- In die Ordnung müssen hinzukommende Strecken eingefügt werden, verlassende Strecken gelöscht werden.
- Außerdem benötigen wir Operationen, um die direkt über und unter einer Strecke liegende Strecke zu erhalten, da (nur) zwischen solchen auf Schnitt geprüft wird.
- Etwa RBTs implementieren diesen dynamischen, sortierten ADT.
- „Unter“ und „Über“ entspricht dem Nachfolger (`bstSucc`) und dem Vorgänger (analog: `bstPred`).

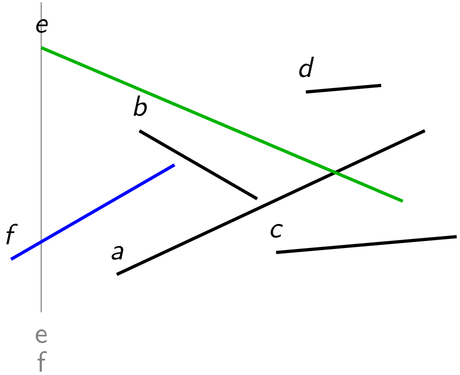
Ereignisliste:

- Ereignispunkte sind alle Endpunkte der Strecken.
  Diese sind bereits im Vorfeld bekannt.
- Dazu kommen – *beim Durchlauf* – ggf. gefundene Schnittpunkte, da sich die Ordnung der beteiligten Linien vertauscht.

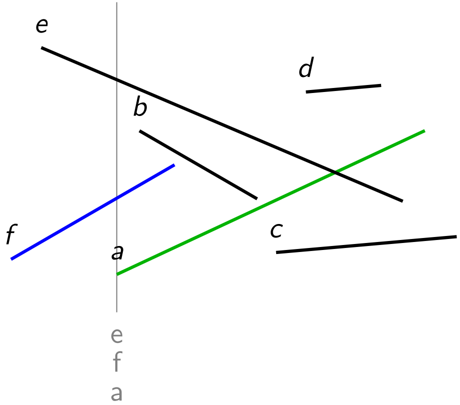
Schnitt eines beliebigen Streckenpaares – Beispiel



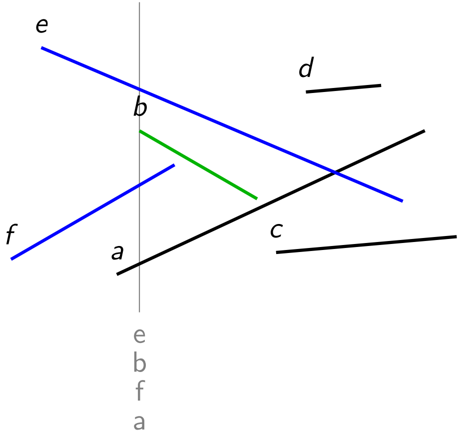
Schnitt eines beliebigen Streckenpaares – Beispiel



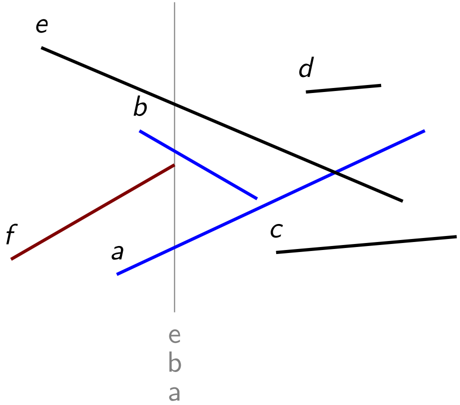
Schnitt eines beliebigen Streckenpaares – Beispiel



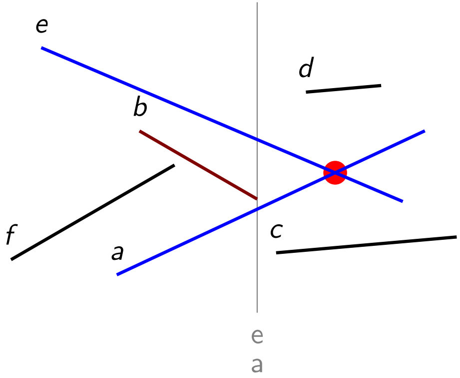
Schnitt eines beliebigen Streckenpaares – Beispiel



Schnitt eines beliebigen Streckenpaares – Beispiel

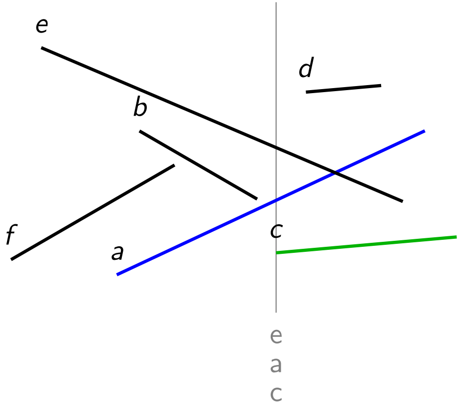


Schnitt eines beliebigen Streckenpaares – Beispiel



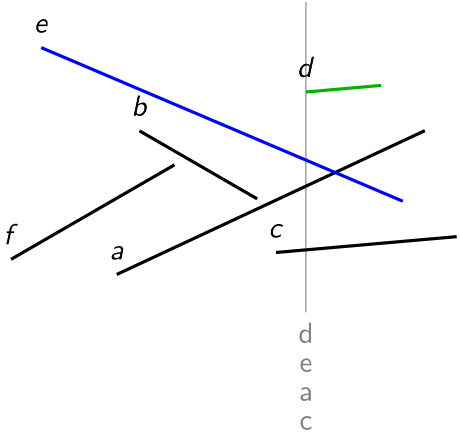
- Im Algorithmus brechen wir ab, sobald der erste Schnitt gefunden ist.

Schnitt eines beliebigen Streckenpaares – Beispiel



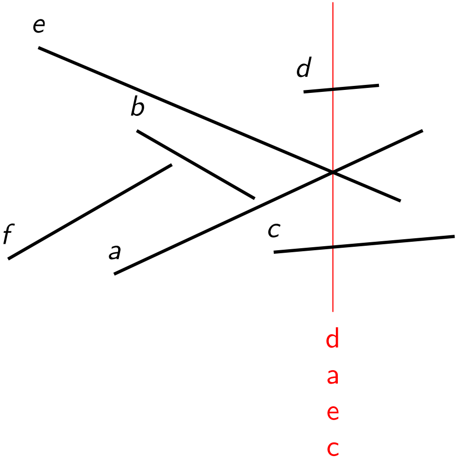
- Im Algorithmus brechen wir ab, sobald der erste Schnitt gefunden ist.

Schnitt eines beliebigen Streckenpaares – Beispiel



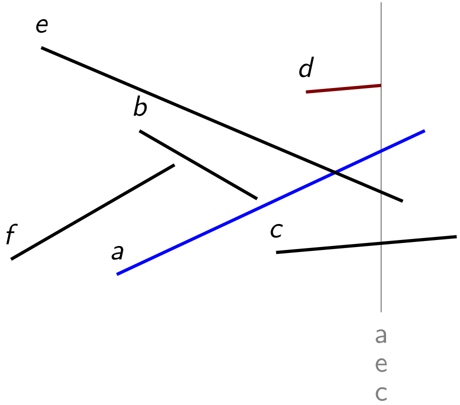
- Im Algorithmus brechen wir ab, sobald der erste Schnitt gefunden ist.

Schnitt eines beliebigen Streckenpaares – Beispiel



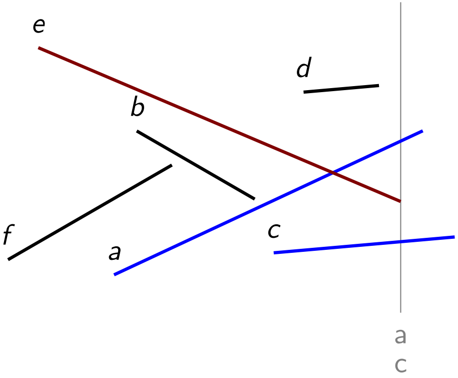
- Im Algorithmus brechen wir ab, sobald der erste Schnitt gefunden ist.
- Hier muss jedoch die Ordnung der beiden Linien am Schnittpunkt getauscht werden (mit einer speziellen ADT-Operation).

Schnitt eines beliebigen Streckenpaares – Beispiel



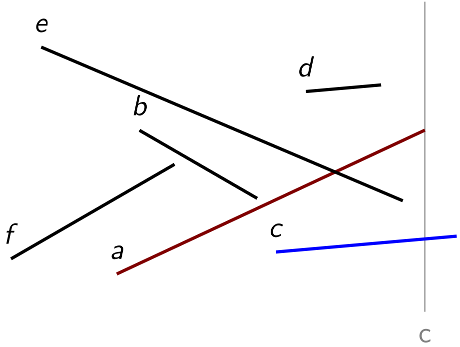
- Im Algorithmus brechen wir ab, sobald der erste Schnitt gefunden ist.
- Hier muss jedoch die Ordnung der beiden Linien am Schnittpunkt getauscht werden (mit einer speziellen ADT-Operation).

Schnitt eines beliebigen Streckenpaares – Beispiel



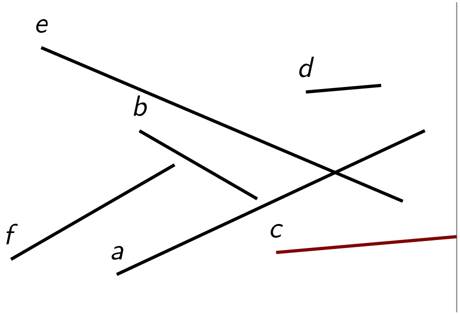
- Im Algorithmus brechen wir ab, sobald der erste Schnitt gefunden ist.
- Hier muss jedoch die Ordnung der beiden Linien am Schnittpunkt getauscht werden (mit einer speziellen ADT-Operation).

Schnitt eines beliebigen Streckenpaares – Beispiel



- Im Algorithmus brechen wir ab, sobald der erste Schnitt gefunden ist.
- Hier muss jedoch die Ordnung der beiden Linien am Schnittpunkt getauscht werden (mit einer speziellen ADT-Operation).

Schnitt eines beliebigen Streckenpaares – Beispiel



- Im Algorithmus brechen wir ab, sobald der erste Schnitt gefunden ist.
- Hier muss jedoch die Ordnung der beiden Linien am Schnittpunkt getauscht werden (mit einer speziellen ADT-Operation).

Schnitt, beliebiges Streckenpaar – Algorithmus (I)

```
typedef float[2] Point; // wir schreiben Point für float[2]

// Wir übergeben die n Strecken in einem Array von Punkten:
// Point linept[2*n]; wobei linept[0]-linept[1],
// linept[2]-linept[3], ..., linept[2*(n-1)]-linept[2*(n-1)+1]

// 1. Tausche ggf. [2*i] und [2*i+1], so dass [2*i] links ist.
// 2. Sortiere die Punkte von links nach rechts; vergleiche x2
// bei gleichem x1. Tausche nun aber nicht die Punkte, sondern
// bestimme die Permutation (tausche auf einem Index-Array).
int[2*n] sortLeftRight(Point &points[2*n]) { ... selbst ... }

// Schnitt lines[i]-lines[i+1] und lines[j]-lines[j+1]?
bool Intersect(Point lines[], int i, int j) {
  if (i == -1 || j == -1) // Strecke i oder j nicht gefunden
    return false;
  return segIntersect(lines[i],lines[i+1],lines[j],lines[j+1]);
}
```

Schnitt, beliebiges Streckenpaar – Algorithmus (II)

```
bool anyIntersect(Point linept[2*n], int n) {
  int sortMap[2*n] = sortLeftRight(linept);

  Tree order; // speichere linken Endpunkt als Repräsentant
  for (int i = 0; i < 2*n; i++) { // Sweepline
    int line = sortMap[i]; // Originalindex des i-ten Punktes
    if (line mod 2 == 0) { // linker Endpunkt
      order.Insert(linept, line);
      int above = order.Pred(line), below = order.Succ(line);
      if (Intersect(linept, line, above)) return true;
      if (Intersect(linept, line, below)) return true;
    } else { // rechter Endpunkt
      line--; // Repräsentant ist aber der linke Punkt
      int above = order.Pred(line), below = order.Succ(line);
      if (Intersect(linept, above, below)) return true;
      order.Delete(linept, line);
    }
  }
  return false;
}
```

Schnitt eines beliebigen Streckenpaares – ADT

Wie kann man aber binäre Suchbäume für Strecken mit zwei Endpunkten verwenden?

Schnitt eines beliebigen Streckenpaares – ADT

Wie kann man aber binäre Suchbäume für Strecken mit zwei Endpunkten verwenden? – Erinnerung:

```
void bstIns(Tree t, Node node) // Füge node in den Baum t ein
  // Suche freien Platz [...]
    if (node.key < root.key) {
      root = root.left;
    } else {
      root = root.right;
    }
  // [...] Einfügen [...]
```

Schnitt eines beliebigen Streckenpaares – ADT

Wie kann man aber binäre Suchbäume für Strecken mit zwei Endpunkten verwenden? – Erinnerung:

```
void bstIns(Tree t, Node node) // Füge node in den Baum t ein
  // Suche freien Platz [...]
    if (node.key < root.key) {
      root = root.left;
    } else {
      root = root.right;
    }
  // [...] Einfügen [...]
```

- Wir müssen einen geeigneten Vergleich verwenden.

Schnitt eines beliebigen Streckenpaares – ADT

Wie kann man aber binäre Suchbäume für Strecken mit zwei Endpunkten verwenden? – Erinnerung:

```
void bstIns(Tree t, Node node) // Füge node in den Baum t ein
  // Suche freien Platz [...]
    if (node.key < root.key) {
      root = root.left;
    } else {
      root = root.right;
    }
  // [...] Einfügen [...]
```

- Wir müssen einen geeigneten Vergleich verwenden.
- Im Algorithmus haben wir Strecken über ihren *linken Endpunkt* eindeutig identifiziert.

Schnitt eines beliebigen Streckenpaares – ADT

Wie kann man aber binäre Suchbäume für Strecken mit zwei Endpunkten verwenden? – Erinnerung:

```
void bstIns(Tree t, Node node) // Füge node in den Baum t ein
  // Suche freien Platz [...]
    if (node.key < root.key) {
      root = root.left;
    } else {
      root = root.right;
    }
  // [...] Einfügen [...]
```

- Wir müssen einen geeigneten Vergleich verwenden.
- Im Algorithmus haben wir Strecken über ihren *linken Endpunkt* eindeutig identifiziert.
- Wir speichern also als Schlüssel nur den Index des linken Endpunktes.

Schnitt eines beliebigen Streckenpaares – ADT

Wie kann man aber binäre Suchbäume für Strecken mit zwei Endpunkten verwenden? – Erinnerung:

```
void bstIns(Tree t, Node node) // Füge node in den Baum t ein
  // Suche freien Platz [...]
    if (node.key < root.key) {
      root = root.left;
    } else {
      root = root.right;
    }
  // [...] Einfügen [...]
```

- Wir müssen einen geeigneten Vergleich verwenden.
- Im Algorithmus haben wir Strecken über ihren *linken Endpunkt* eindeutig identifiziert.
- Wir speichern also als Schlüssel nur den Index des linken Endpunktes.

```
void Tree::Insert(Point linp[], int i) // [...]
  if (direction(linp[root.key+1], linp[root.key], linp[i]) < 0)
  // [...]
```

Schnitt eines beliebigen Streckenpaares – Komplexität

Zeitkomplexität

Die Worst-Case Zeitkomplexität, zu bestimmen op sich zwei beliebige Strecken aus einer Menge von n Strecken schneiden, ist $O(n \log n)$.

Schnitt eines beliebigen Streckenpaares – Komplexität

Zeitkomplexität

Die Worst-Case Zeitkomplexität, zu bestimmen op sich zwei beliebige Strecken aus einer Menge von n Strecken schneiden, ist $O(n \log n)$.

Beweis.

- Der Test, ob sich zwei Strecken schneiden geht in $O(1)$.

Schnitt eines beliebigen Streckenpaares – Komplexität

Zeitkomplexität

Die Worst-Case Zeitkomplexität, zu bestimmen op sich zwei beliebige Strecken aus einer Menge von n Strecken schneiden, ist $O(n \log n)$.

Beweis.

- Der Test, ob sich zwei Strecken schneiden geht in $O(1)$.
- Zum Sortieren der Ereignispunkte können wir auf bekannte Sortierverfahren mit $O(n \log n)$ zurückgreifen.

Schnitt eines beliebigen Streckenpaares – Komplexität

Zeitkomplexität

Die Worst-Case Zeitkomplexität, zu bestimmen op sich zwei beliebige Strecken aus einer Menge von n Strecken schneiden, ist $O(n \log n)$.

Beweis.

- Der Test, ob sich zwei Strecken schneiden geht in $O(1)$.
- Zum Sortieren der Ereignispunkte können wir auf bekannte Sortierverfahren mit $O(n \log n)$ zurückgreifen.
- Wir iterieren über die $2 \cdot n$ Endpunkte, wobei wir $O(\log n)$-Operationen der RBTs verwenden.

Schnitt eines beliebigen Streckenpaares – Komplexität

Zeitkomplexität

Die Worst-Case Zeitkomplexität, zu bestimmen op sich zwei beliebige Strecken aus einer Menge von n Strecken schneiden, ist $O(n \log n)$.

Beweis.

- Der Test, ob sich zwei Strecken schneiden geht in $O(1)$.
- Zum Sortieren der Ereignispunkte können wir auf bekannte Sortierverfahren mit $O(n \log n)$ zurückgreifen.
- Wir iterieren über die $2 \cdot n$ Endpunkte, wobei wir $O(\log n)$-Operationen der RBTs verwenden. Somit: $O(n \log n)$.

Schnitt eines beliebigen Streckenpaares – Komplexität

Zeitkomplexität

Die Worst-Case Zeitkomplexität, zu bestimmen op sich zwei beliebige Strecken aus einer Menge von n Strecken schneiden, ist $O(n \log n)$.

Beweis.

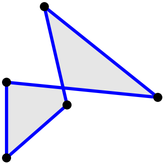
- Der Test, ob sich zwei Strecken schneiden geht in $O(1)$.
- Zum Sortieren der Ereignispunkte können wir auf bekannte Sortierverfahren mit $O(n \log n)$ zurückgreifen.
- Wir iterieren über die $2 \cdot n$ Endpunkte, wobei wir $O(\log n)$-Operationen der RBTs verwenden. Somit: $O(n \log n)$.

$\Rightarrow$ Im Worst-Case benötigt `anyIntersect` $O(n \log n)$ Zeit.

$\square$

Übersicht

Polygone

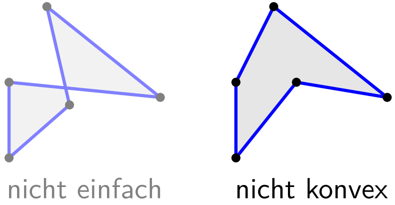


nicht einfach

einfach

Ein Polygon heißt einfach, wenn es sich nicht selbst schneidet.

Polygone



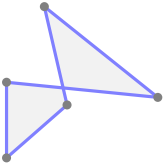
einfach

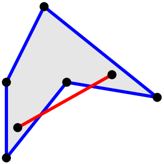
Ein Polygon heißt einfach, wenn es sich nicht selbst schneidet.

konvex

Ein Polygon heißt konvex, wenn jede Verbindung (Konvexkombination) zweier Punkte des Polygons nie außerhalb des Polygons liegt.

Polygone





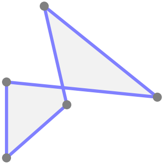
einfach

Ein Polygon heißt einfach, wenn es sich nicht selbst schneidet.

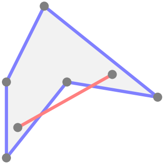
konvex

Ein Polygon heißt konvex, wenn jede Verbindung (Konvexkombination) zweier Punkte des Polygons nie außerhalb des Polygons liegt.

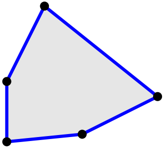
Polygone



nicht einfach



nicht konvex



konvex, einfach

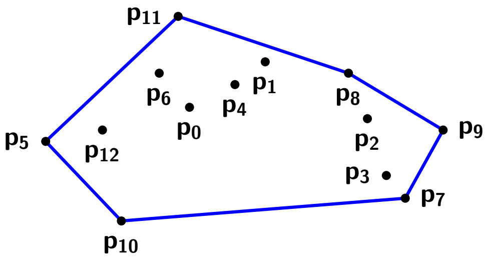
einfach

Ein Polygon heißt einfach, wenn es sich nicht selbst schneidet.

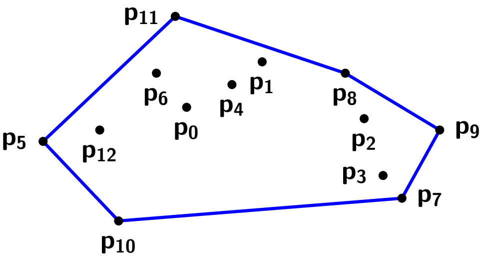
konvex

Ein Polygon heißt konvex, wenn jede Verbindung (Konvexkombination) zweier Punkte des Polygons nie außerhalb des Polygons liegt.

Konvexe Hülle



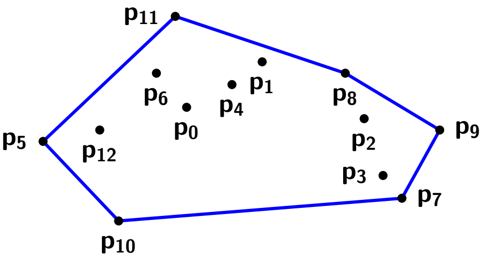
Konvexe Hülle



Konvexe Hülle

Die konvexe Hülle einer Menge Q von Punkten ist das kleinste konvexe Polygon P, für das sich jeder Punkt in Q entweder auf dem Rand von P oder in seinem Inneren befindet.

Konvexe Hülle

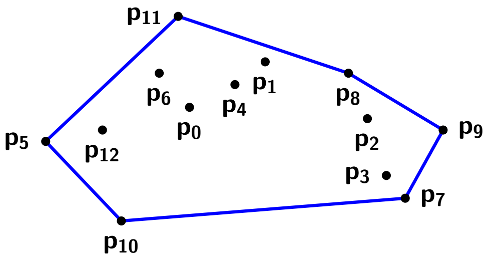


Konvexe Hülle

Die konvexe Hülle einer Menge Q von Punkten ist das kleinste konvexe Polygon P, für das sich jeder Punkt in Q entweder auf dem Rand von P oder in seinem Inneren befindet.

- Betrachte jeden Punkt als Nagel, der aus einem Brett herausragt.

Konvexe Hülle



Konvexe Hülle

Die konvexe Hülle einer Menge Q von Punkten ist das kleinste konvexe Polygon P, für das sich jeder Punkt in Q entweder auf dem Rand von P oder in seinem Inneren befindet.

- Betrachte jeden Punkt als Nagel, der aus einem Brett herausragt.
- Die konvexe Hülle hat dann die Form, die durch ein straffes Gummiband gebildet wird, das alle Nägel umschließt.

Konvexe Hülle – Graham-Scan – Idee

Konvexe Hülle – Graham-Scan – Idee

- Wir ziehen ein Gummiband Punkt für Punkt weiter.

Konvexe Hülle – Graham-Scan – Idee

- Wir ziehen ein Gummiband Punkt für Punkt weiter.
- Ausgehend von einem ausgezeichnetem Punkt, der auf der Hülle liegt:

Konvexe Hülle – Graham-Scan – Idee

- Wir ziehen ein Gummiband Punkt für Punkt weiter.
- Ausgehend von einem ausgezeichnetem Punkt, der auf der Hülle liegt:
  - Der Punkt mit der geringsten x_2-Koordinate, bei Mehrdeutigkeiten außerdem geringsten x_1-Koordinate, ist geeignet.

Konvexe Hülle – Graham-Scan – Idee

- Wir ziehen ein Gummiband Punkt für Punkt weiter.
- Ausgehend von einem ausgezeichnetem Punkt, der auf der Hülle liegt:
  - Der Punkt mit der geringsten x_2-Koordinate, bei Mehrdeutigkeiten außerdem geringsten x_1-Koordinate, ist geeignet.
- Von diesem ausgehend sortiere die Punkte, diesmal nach zunehmendem Winkel (mittels Determinante).

Konvexe Hülle – Graham-Scan – Idee

- Wir ziehen ein Gummiband Punkt für Punkt weiter.
- Ausgehend von einem ausgezeichnetem Punkt, der auf der Hülle liegt:
  - Der Punkt mit der geringsten x_2-Koordinate, bei Mehrdeutigkeiten außerdem geringsten x_1-Koordinate, ist geeignet.
- Von diesem ausgehend sortiere die Punkte, diesmal nach zunehmendem Winkel (mittels Determinante).
- Das entspricht einer rotierenden Sweepline.

Konvexe Hülle – Graham-Scan – Idee

- Wir ziehen ein Gummiband Punkt für Punkt weiter.
- Ausgehend von einem ausgezeichnetem Punkt, der auf der Hülle liegt:
  - Der Punkt mit der geringsten x_2-Koordinate, bei Mehrdeutigkeiten außerdem geringsten x_1-Koordinate, ist geeignet.
- Von diesem ausgehend sortiere die Punkte, diesmal nach zunehmendem Winkel (mittels Determinante).
- Das entspricht einer rotierenden Sweepline.

Dann gilt:

- Entweder das Gummiband liegt weiterhin an, oder der neue Punkt hebt das Gummiband vom vorigen Punkt weg.

Konvexe Hülle – Graham-Scan – Idee

- Wir ziehen ein Gummiband Punkt für Punkt weiter.
- Ausgehend von einem ausgezeichnetem Punkt, der auf der Hülle liegt:
  - Der Punkt mit der geringsten x_2-Koordinate, bei Mehrdeutigkeiten außerdem geringsten x_1-Koordinate, ist geeignet.
- Von diesem ausgehend sortiere die Punkte, diesmal nach zunehmendem Winkel (mittels Determinante).
- Das entspricht einer rotierenden Sweepline.

Dann gilt:

- Entweder das Gummiband liegt weiterhin an, oder der neue Punkt hebt das Gummiband vom vorigen Punkt weg.
  Dann ist der vorige Punkt sicherlich nicht Teil der konvexen Hülle.

Konvexe Hülle – Graham-Scan – Idee

- Wir ziehen ein Gummiband Punkt für Punkt weiter.
- Ausgehend von einem ausgezeichnetem Punkt, der auf der Hülle liegt:
  - Der Punkt mit der geringsten x_2-Koordinate, bei Mehrdeutigkeiten außerdem geringsten x_1-Koordinate, ist geeignet.
- Von diesem ausgehend sortiere die Punkte, diesmal nach zunehmendem Winkel (mittels Determinante).
- Das entspricht einer rotierenden Sweepline.

Dann gilt:

- Entweder das Gummiband liegt weiterhin an, oder der neue Punkt hebt das Gummiband vom vorigen Punkt weg.
  Dann ist der vorige Punkt sicherlich nicht Teil der konvexen Hülle.
  Überprüfe in dem Fall nun den „neuen“ vorigen Punkt (usw.).

Konvexe Hülle – Graham-Scan – Idee

- Wir ziehen ein Gummiband Punkt für Punkt weiter.
- Ausgehend von einem ausgezeichnetem Punkt, der auf der Hülle liegt:
  - Der Punkt mit der geringsten x_2-Koordinate, bei Mehrdeutigkeiten außerdem geringsten x_1-Koordinate, ist geeignet.
- Von diesem ausgehend sortiere die Punkte, diesmal nach zunehmendem Winkel (mittels Determinante).
- Das entspricht einer rotierenden Sweepline.

Dann gilt:

- Entweder das Gummiband liegt weiterhin an, oder der neue Punkt hebt das Gummiband vom vorigen Punkt weg.
  Dann ist der vorige Punkt sicherlich nicht Teil der konvexen Hülle.
  Überprüfe in dem Fall nun den „neuen“ vorigen Punkt (usw.).
- Bemerke, dass auch (neben dem Startpunkt) der Punkt mit dem geringsten Polarwinkel sicher auf der Hülle liegt.

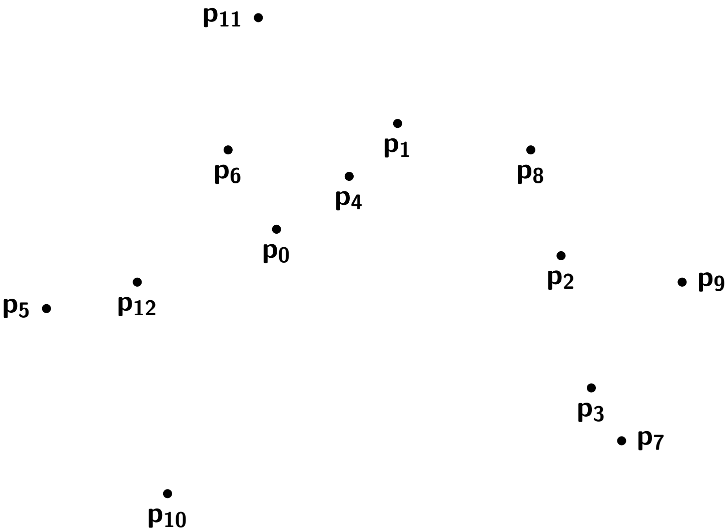
Konvexe Hülle – Graham-Scan – Idee

- Wir ziehen ein Gummiband Punkt für Punkt weiter.
- Ausgehend von einem ausgezeichnetem Punkt, der auf der Hülle liegt:
  - Der Punkt mit der geringsten x_2-Koordinate, bei Mehrdeutigkeiten außerdem geringsten x_1-Koordinate, ist geeignet.
- Von diesem ausgehend sortiere die Punkte, diesmal nach zunehmendem Winkel (mittels Determinante).
- Das entspricht einer rotierenden Sweepline.

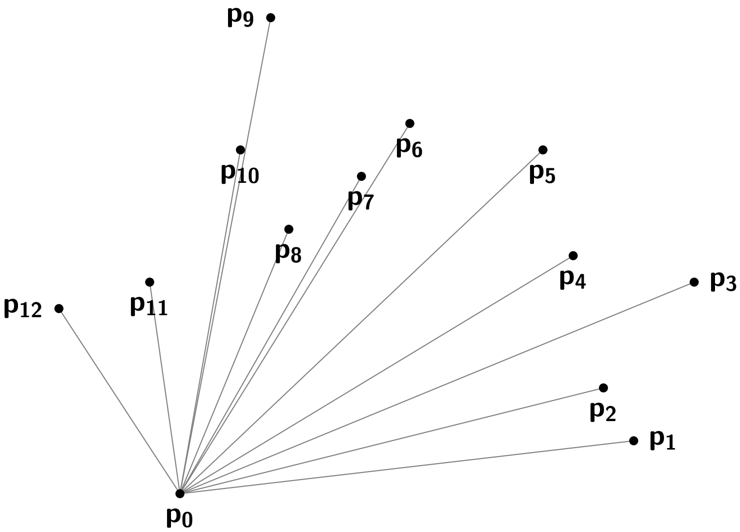
Dann gilt:

- Entweder das Gummiband liegt weiterhin an, oder der neue Punkt hebt das Gummiband vom vorigen Punkt weg.
  Dann ist der vorige Punkt sicherlich nicht Teil der konvexen Hülle.
  Überprüfe in dem Fall nun den „neuen“ vorigen Punkt (usw.).
- Bemerke, dass auch (neben dem Startpunkt) der Punkt mit dem geringsten Polarwinkel sicher auf der Hülle liegt.
  - Gleiches gilt für den Punkt mit größtem Polarwinkel.

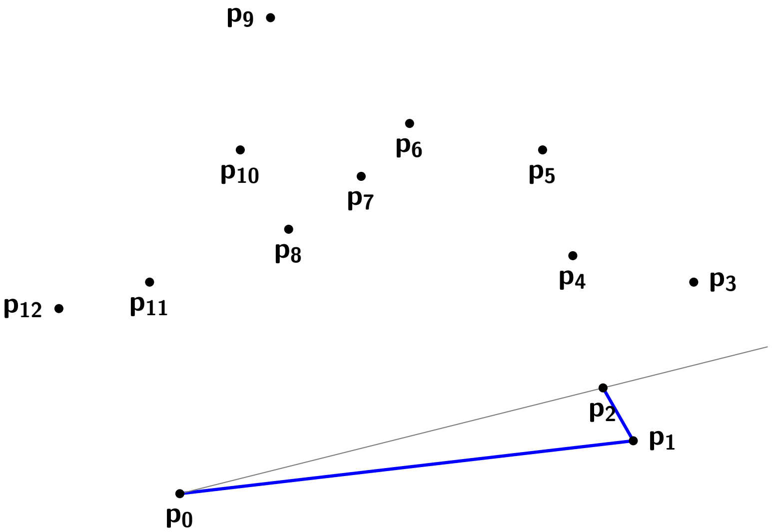
Konvexe Hülle – Graham-Scan – Beispiel



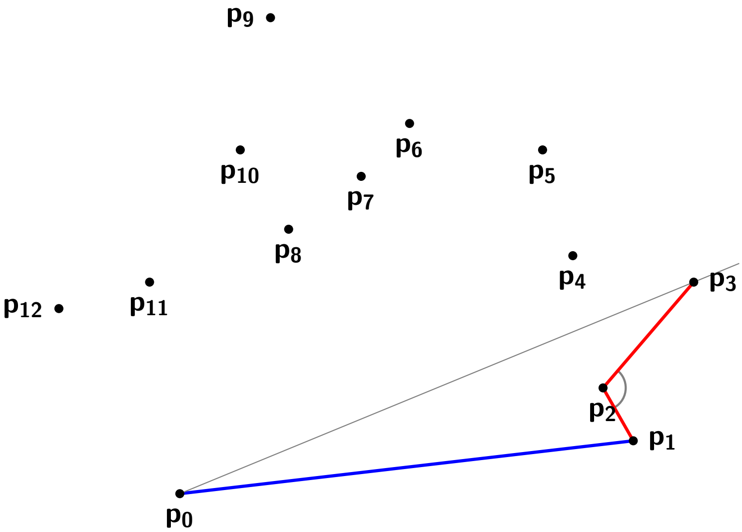
Konvexe Hülle – Graham-Scan – Beispiel



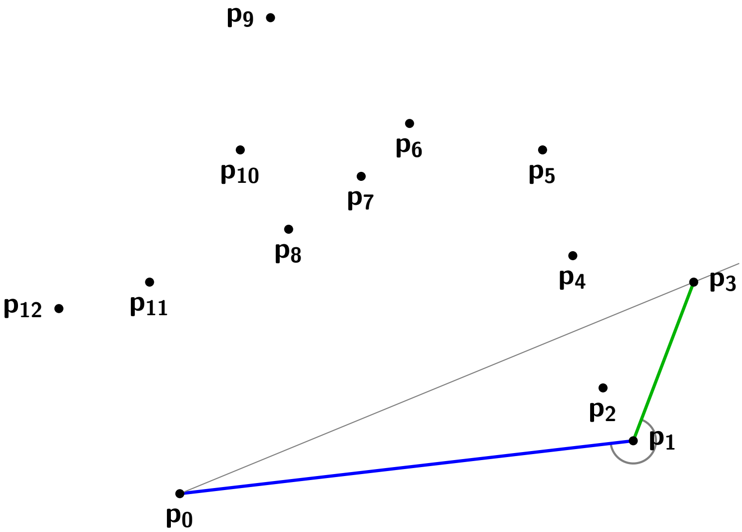
Konvexe Hülle – Graham-Scan – Beispiel



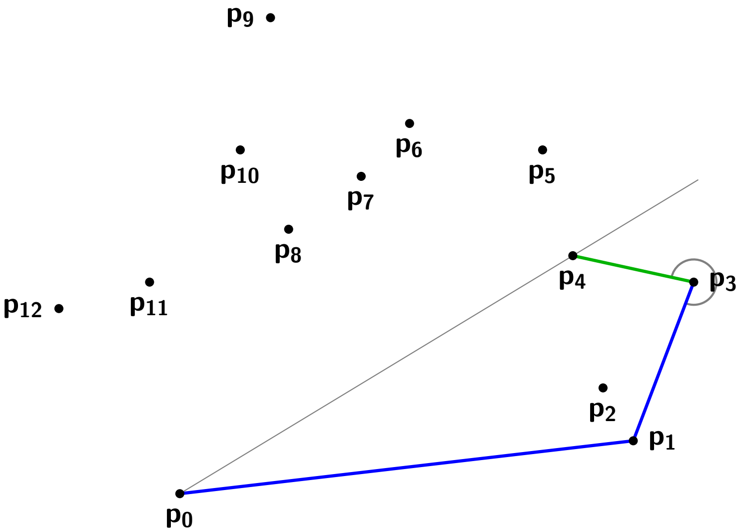
Konvexe Hülle – Graham-Scan – Beispiel



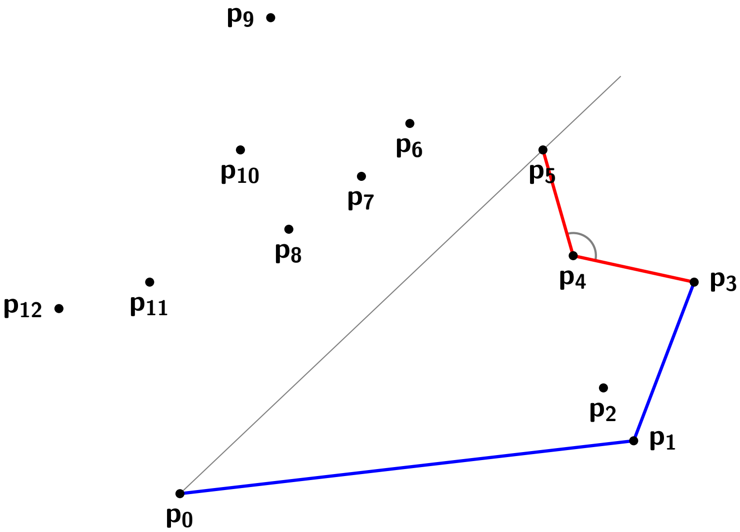
Konvexe Hülle – Graham-Scan – Beispiel



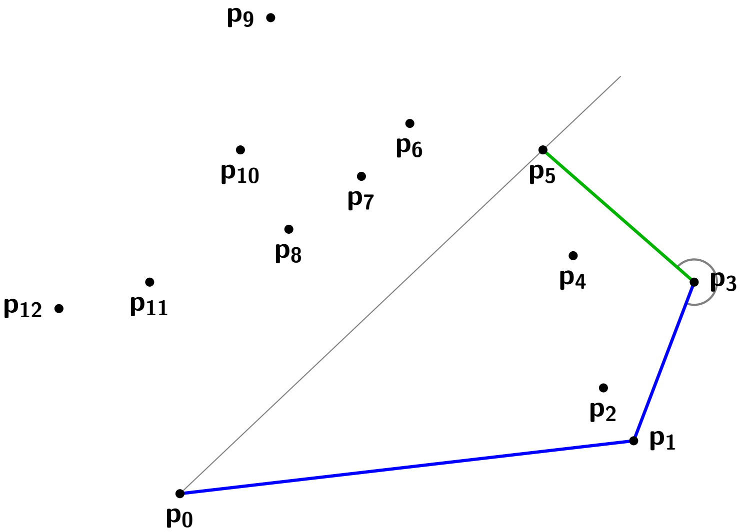
Konvexe Hülle – Graham-Scan – Beispiel



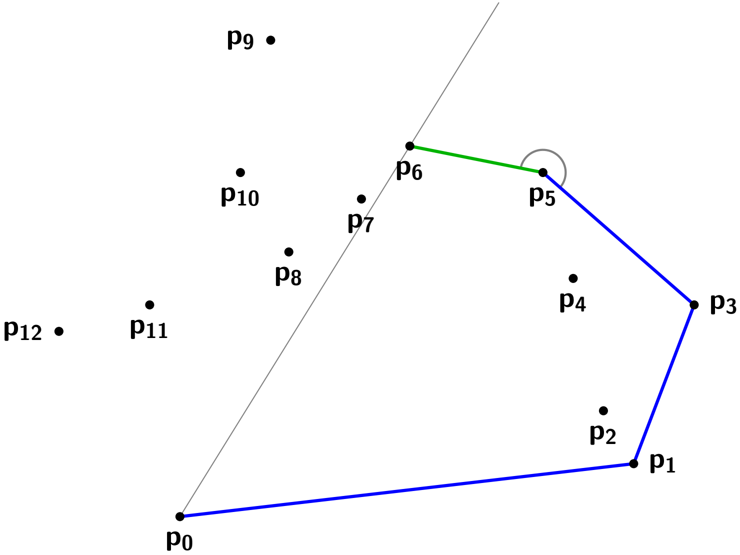
Konvexe Hülle – Graham-Scan – Beispiel



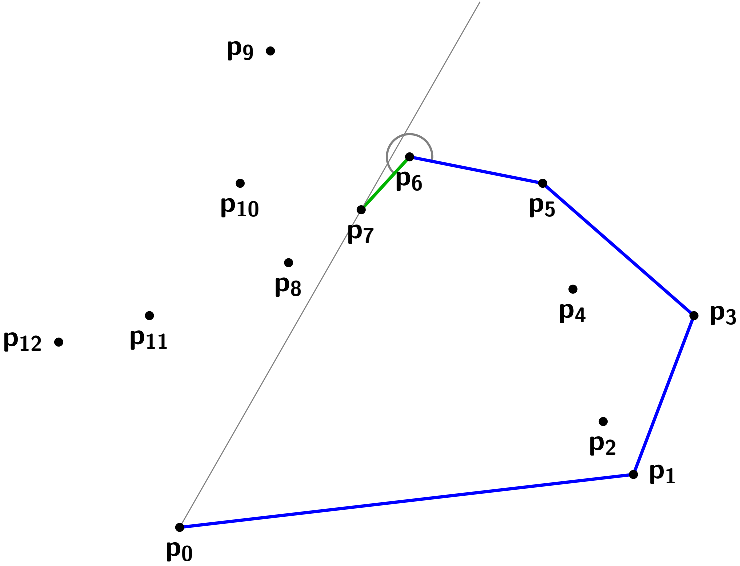
Konvexe Hülle – Graham-Scan – Beispiel



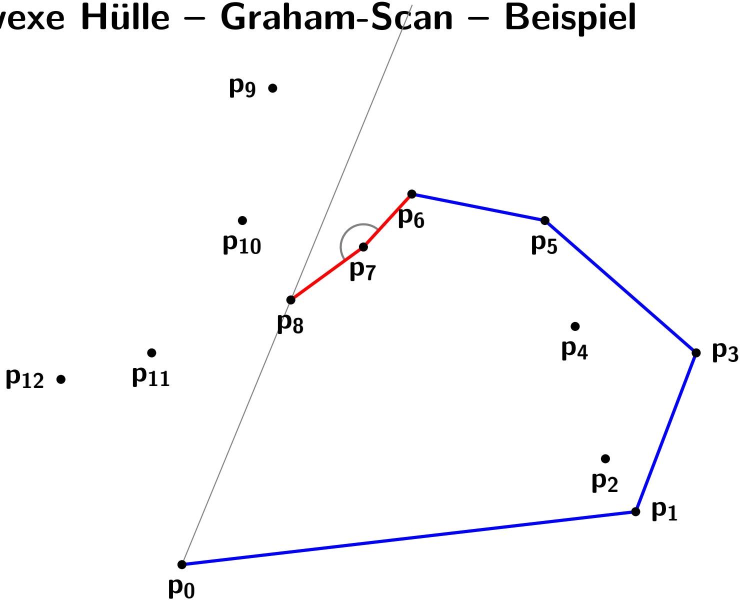
Konvexe Hülle – Graham-Scan – Beispiel



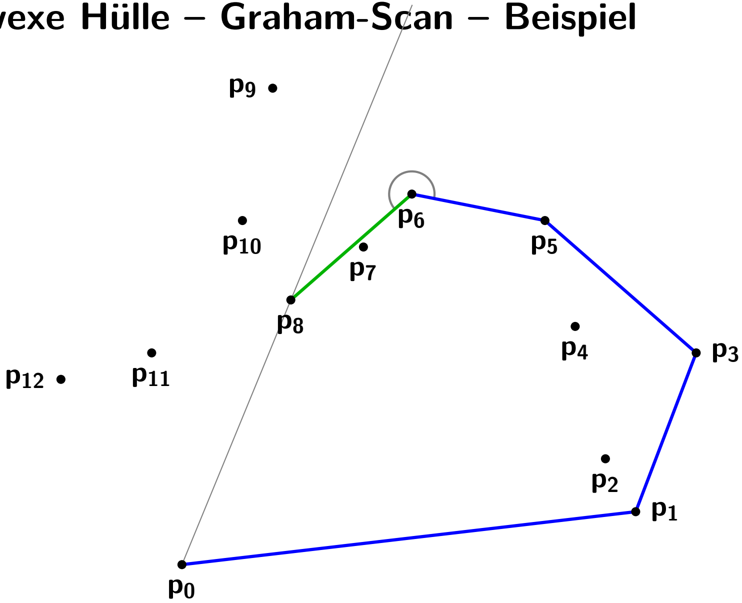
Konvexe Hülle – Graham-Scan – Beispiel



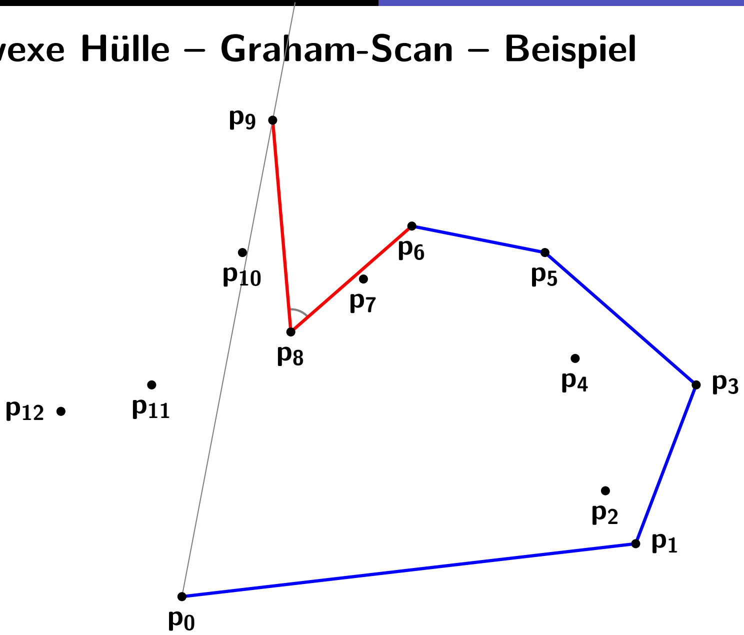
Konvexe Hülle – Graham-Scan – Beispiel



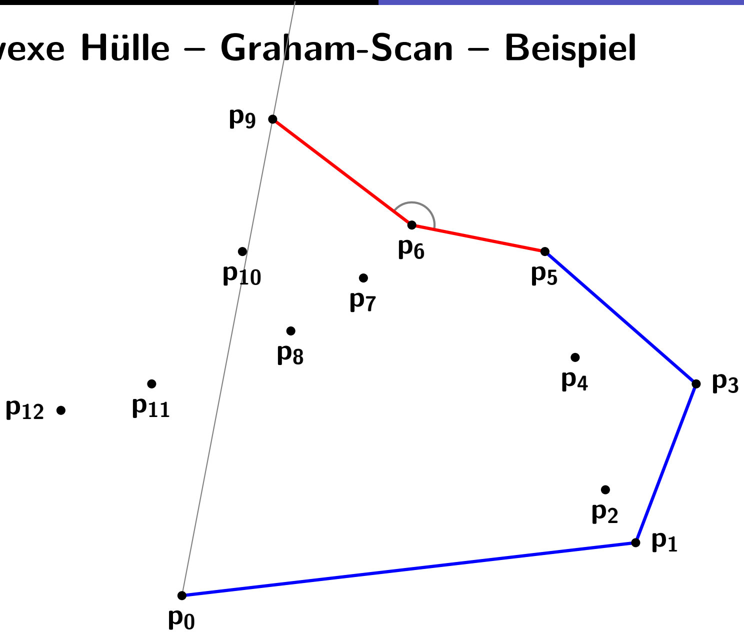
Konvexe Hülle – Graham-Scan – Beispiel



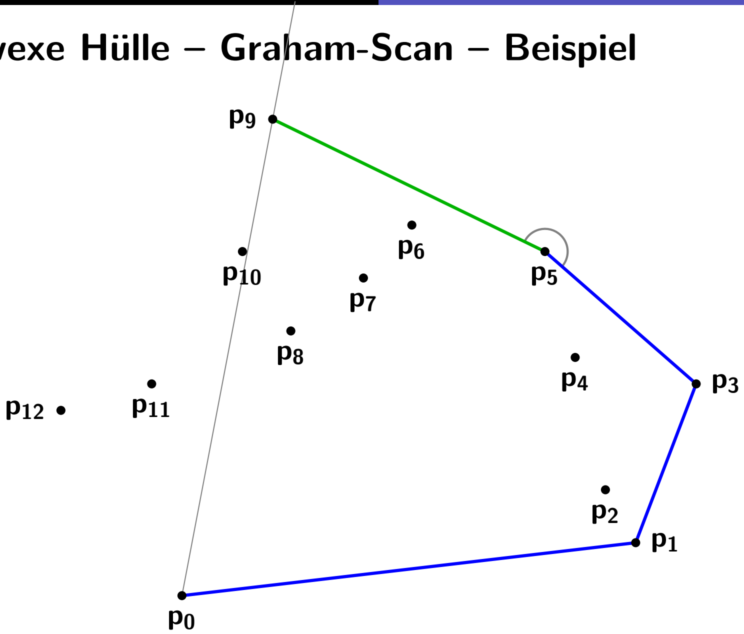
Konvexe Hülle – Graham-Scan – Beispiel



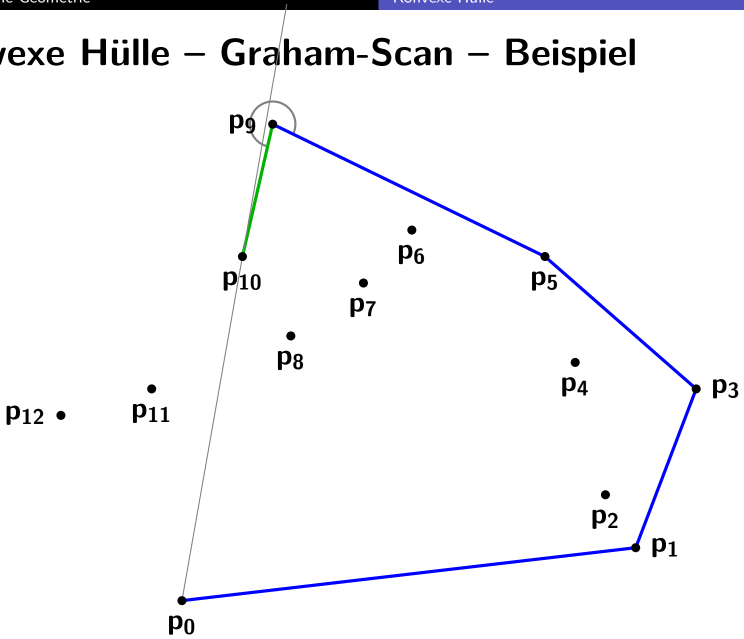
Konvexe Hülle – Graham-Scan – Beispiel



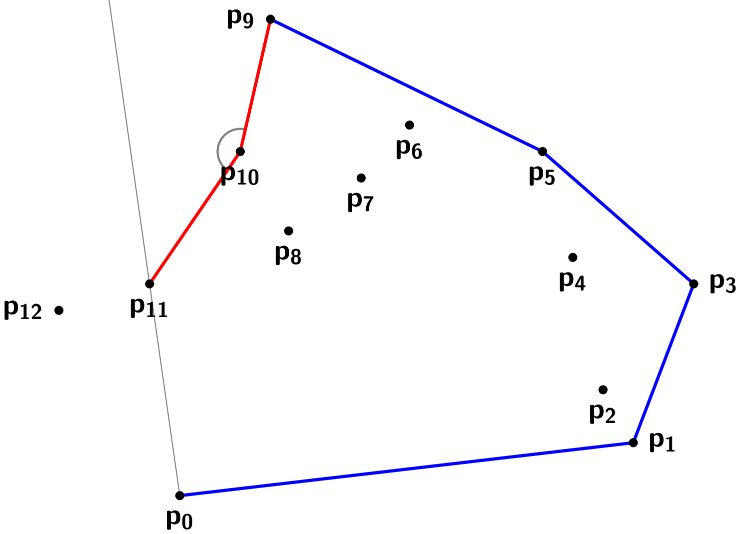
Konvexe Hülle – Graham-Scan – Beispiel



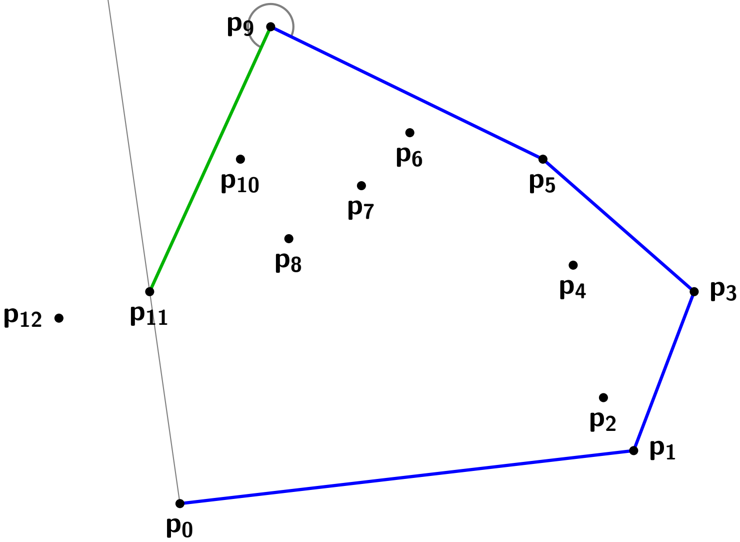
Konvexe Hülle – Graham-Scan – Beispiel



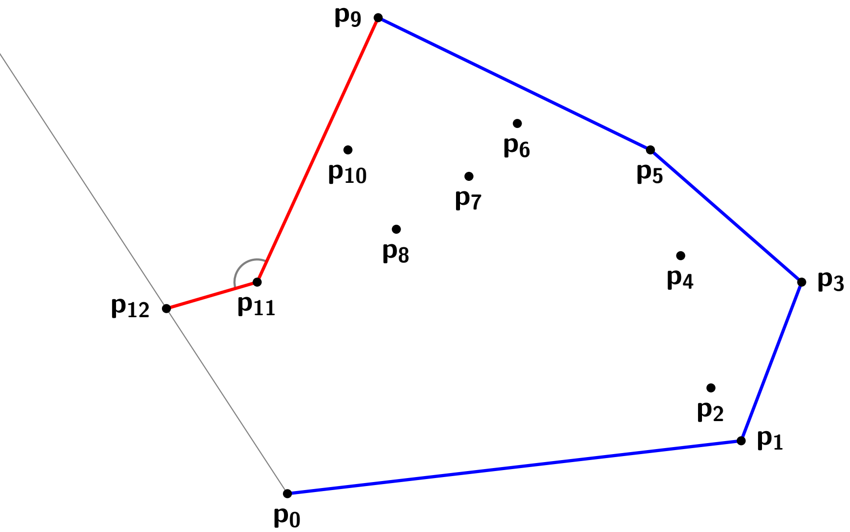
Konvexe Hülle – Graham-Scan – Beispiel



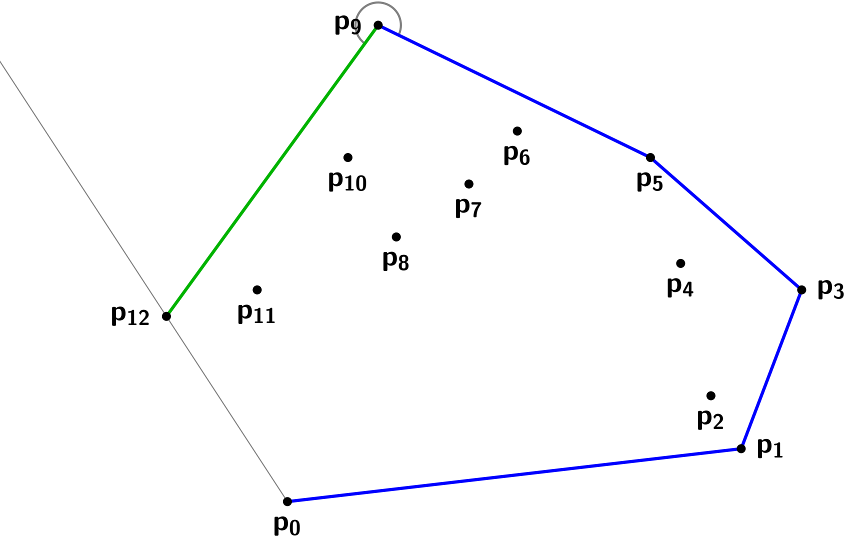
Konvexe Hülle – Graham-Scan – Beispiel



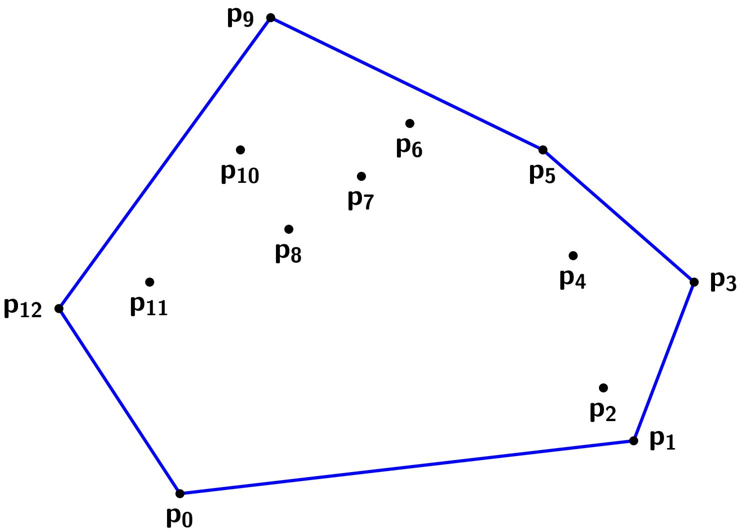
Konvexe Hülle – Graham-Scan – Beispiel



Konvexe Hülle – Graham-Scan – Beispiel



Konvexe Hülle – Graham-Scan – Beispiel



Konvexe Hülle – Graham-Scan – Algorithmus

```
// gibt index der Punkte auf der Hülle zurück
int[] grahamScan(Point poly[n], int n) {
  // Finde Index des Punktes mit minimaler x1 Koordinate
  int refPnt = findRef(poly);
  // Sortiere Punkte nach aufsteigendem Polarwinkel bezüglich
  // refPnt, setze dabei refPnt an Position 0. Lösche alle
  // bis auf den äußersten, bei mehreren mit gleichem Winkel.
  inverseMap = polarSort(poly, refPnt);

  Stack hull; // Punkte, die bis jetzt auf der Hülle sind.
  for (int i = 0; i < n; i++) {
    if (i > 2)
      while (direction(poly[hull[-2]], poly[hull[-1]],poly[i])
              < 0) // die oberen beiden Punkte vom Stack
        hull.pop();

    hull.push(i);
  }
  return inverseMap(hull); // macht die Umsortierung rückgängig
}
```

Graham-Scan – Korrektheit

Korrektheit

Wenn `grahamScan` auf einer Punktemenge Q läuft, dann gilt bei Terminierung, dass der Stapel `hull` von unten nach oben die Eckpunkte der konvexen Hüllen von Q enthält in der dem Uhrzeigersinn entgegengesetzten Reihenfolge.

Graham-Scan – Korrektheit

Korrektheit

Wenn `grahamScan` auf einer Punktemenge Q läuft, dann gilt bei Terminierung, dass der Stapel `hull` von unten nach oben die Eckpunkte der konvexen Hüllen von Q enthält in der dem Uhrzeigersinn entgegengesetzten Reihenfolge.

Beweis.

(Skizze). Die Schleifeninvariante ist: zu Beginn der i-ten Iteration besteht der Stapel `hull` von unten nach oben genau aus den Eckpunkten von der konvexen Hülle der Punktenmenge $\{ \mathbf{p_0}, \ldots, \mathbf{p_{i-1}} \}$.

Wir verzichten hier auf weitere Details. □

Graham-Scan – Komplexität

Zeitkomplexität

Die Worst-Case Zeitkomplexität von `grahamScan` für eine Menge mit n Punkten ist $\Theta(n \log n)$.

Graham-Scan – Komplexität

Zeitkomplexität

Die Worst-Case Zeitkomplexität von `grahamScan` für eine Menge mit n Punkten ist $\Theta(n \log n)$.

Beweis.

- `direction` $\in \Theta(1)$.

Graham-Scan – Komplexität

Zeitkomplexität

Die Worst-Case Zeitkomplexität von `grahamScan` für eine Menge mit n Punkten ist $\Theta(n \log n)$.

Beweis.

- `direction` $\in \Theta(1)$.
- `findRef` benötigt einen Durchlauf über die Punkte, also $\Theta(n)$.

Graham-Scan – Komplexität

Zeitkomplexität

Die Worst-Case Zeitkomplexität von `grahamScan` für eine Menge mit n Punkten ist $\Theta(n \log n)$.

Beweis.

- `direction` $\in \Theta(1)$.
- `findRef` benötigt einen Durchlauf über die Punkte, also $\Theta(n)$.
- Sortieren: `polarSort` $\in \Theta(n \log n)$.

Graham-Scan – Komplexität

Zeitkomplexität

Die Worst-Case Zeitkomplexität von `grahamScan` für eine Menge mit n Punkten ist $\Theta(n \log n)$.

Beweis.

- `direction` $\in \Theta(1)$.
- `findRef` benötigt einen Durchlauf über die Punkte, also $\Theta(n)$.
- Sortieren: `polarSort` $\in \Theta(n \log n)$.
- n Schleifendurchläufe mit, von der **`while`**-Schleife abgesehen, $\Theta(1)$.

Graham-Scan – Komplexität

Zeitkomplexität

Die Worst-Case Zeitkomplexität von `grahamScan` für eine Menge mit n Punkten ist $\Theta(n \log n)$.

Beweis.

- `direction` $\in \Theta(1)$.
- `findRef` benötigt einen Durchlauf über die Punkte, also $\Theta(n)$.
- Sortieren: `polarSort` $\in \Theta(n \log n)$.
- n Schleifendurchläufe mit, von der **`while`**-Schleife abgesehen, $\Theta(1)$.
- Da im **`while`** nur Punkte von Stack genommen werden, die vorher durch die **`for`**-Schleife hinzugefügt wurden, können alle Iterationen der **`while`**-Schleife in der Analyse jeweils zum jeweiligen `push` gerechnet werden.

Graham-Scan – Komplexität

Zeitkomplexität

Die Worst-Case Zeitkomplexität von `grahamScan` für eine Menge mit n Punkten ist $\Theta(n \log n)$.

Beweis.

- `direction` $\in \Theta(1)$.
- `findRef` benötigt einen Durchlauf über die Punkte, also $\Theta(n)$.
- Sortieren: `polarSort` $\in \Theta(n \log n)$.
- n Schleifendurchläufe mit, von der **`while`**-Schleife abgesehen, $\Theta(1)$.
- Da im **`while`** nur Punkte von Stack genommen werden, die vorher durch die **`for`**-Schleife hinzugefügt wurden, können alle Iterationen der **`while`**-Schleife in der Analyse jeweils zum jeweiligen `push` gerechnet werden.
  Somit bleibt es bei insgesamt $\Theta(n)$ für alle Schleifen. □