Datenstrukturen und Algorithmen

Vorlesung 4: Suchen (K5)

Joost-Pieter Katoen

Lehrstuhl für Informatik 2
Software Modeling and Verification Group

http://www-i2.informatik.rwth-aachen.de/i2/dsal12/

17. April 2012

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Übersicht

Übersicht

Formale Definition (I)

Einige hilfreiche Begriffe

D_n = Menge aller Eingaben der Länge n

$t(I)$ = für Eingabe I benötigte Anzahl elementarer Operationen

$\Pr(I)$ = Wahrscheinlichkeit, dass Eingabe I auftritt

Woher kennen wir:

$t(I)$? – Durch Analyse des fraglichen Algorithmus.

$\Pr(I)$? – Erfahrung, Vermutung (z. B. „alle Eingaben treten mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf“).

Formale Definition (II)

Average-Case Laufzeit

Die Average-Case Laufzeit von A ist die von A durchschnittlich benötigte Anzahl elementarer Operationen auf einer *beliebigen* Eingabe der Länge n:

$$A(n) = \sum_{I \in D_n} \Pr(I) \cdot t(I)$$

Intermezzo: Erwartungswerte

Betrachte einen einarmigen Banditen. Er hat 3 Räder und jedes Rad ist beschriftet mit Herz- und Karo-Symbolen.

Jedes Rad wird unabhängig von allen anderen Rädern angestoßen; jedes liefert Herz oder Karo, beides mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$.

Man gewinnt den ganzen Jackpot wenn alle Räder ein Herz-Symbol zeigen.

Man gewinnt die Hälfte des Jackpots wenn alle Räder ein Karo-Symbol zeigen.

Sonst gewinnt man nichts.

Frage: Wieviel Prozent des Jackpots gewinnt man im Schnitt?

Antwort: $\frac{1}{8} \times 1 + \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} + \frac{6}{8} \times 0 \;=\; \frac{3}{16}$.

Lineare Suche

Rechenproblem

Eingabe: Array `E` mit `n` > 0 Einträgen, sowie das gesuchte Element `K`.

Ausgabe: Ist `K` in `E` enthalten?

```
1 bool linSearch(int E[], int n, int K) {
2   for (int index = 0; index < n; index ++) {
3     if (E[index] == K) {
4       return true; // oder: return index;
5     }
6   }
7   return false; // nicht gefunden
8 }
```


Lineare Suche – Analyse

Elementare Operation

Vergleich einer ganzen Zahl `K` mit Element `E[index]`.

Menge aller Eingaben

D_n ist die Menge aller Permutationen von n ganzen Zahlen, die ursprünglich aus einer Menge $N > n$ ganzer Zahlen ausgewählt wurden.

Zeitkomplexität

- $W(n) = n$, da n Vergleiche notwendig sind, falls `K` nicht in `E` vorkommt (oder wenn `K == E[n]`).
- $B(n) = 1$, da ein Vergleich ausreicht, wenn `K` gleich `E[1]` ist.
- $A(n) \approx \frac{1}{2}n$, da im Schnitt `K` mit etwa der Hälfte des Arrays `E` verglichen werden muss? – Nein.

Lineare Suche – Average-Case-Analyse (I)

Zwei Szenarien

1. `K` kommt nicht in `E` vor.
2. `K` kommt in `E` vor.

Zwei Definitionen

1. Sei $A_{K \notin E}(n)$ die Average-Case-Laufzeit für den Fall "`K` nicht in `E`".
2. Sei $A_{K \in E}(n)$ die Average-Case-Laufzeit für den Fall "`K` in `E`".

$$A(n) = \Pr\{\texttt{K in E}\} \cdot A_{K \in E}(n) + \Pr\{\texttt{K nicht in E}\} \cdot A_{K \notin E}(n)$$

Der Fall "`K` in `E`"

- Angenommen alle Elemente in `E` sind unterschiedlich.
- Damit ist die Wahrscheinlichkeit für `K == E[i]` gleich $\frac{1}{n}$.
- Die Anzahl benötigter Vergleiche im Fall `K == E[i]` ist $i+1$.
- Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} A_{K \in E}(n) &= \sum_{i=0}^{n-1} \Pr\{\texttt{K == E[i]} \mid \texttt{K in E}\} \cdot t(\texttt{K == E[i]}) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{n}\right) \cdot (i+1) \\ &= \left(\frac{1}{n}\right) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) \\ &= \left(\tfrac{1}{n}\right) \cdot \tfrac{n(n+1)}{2} \\ &= \tfrac{n+1}{2}. \end{aligned}$$

Herleitung

$$\begin{aligned} A(n) &= \Pr\{\texttt{K in E}\} \cdot A_{K \in E}(n) + \Pr\{\texttt{K nicht in E}\} \cdot A_{K \notin E}(n) \\ &\quad \mid A_{K \in E}(n) = \tfrac{n+1}{2} \\ &= \Pr\{\texttt{K in E}\} \cdot \frac{n+1}{2} + \Pr\{\texttt{K nicht in E}\} \cdot A_{K \notin E}(n) \\ &\quad \mid \Pr\{\text{nicht } B\} = 1 - \Pr\{B\} \\ &= \Pr\{\texttt{K in E}\} \cdot \frac{n+1}{2} + (1 - \Pr\{\texttt{K in E}\}) \cdot A_{K \notin E}(n) \\ &\quad \mid A_{K \notin E}(n) = n \\ &= \Pr\{\texttt{K in E}\} \cdot \frac{n+1}{2} + (1 - \Pr\{\texttt{K in E}\}) \cdot n \\ &= n \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\Pr\{\texttt{K in E}\}\right) + \frac{1}{2}\Pr\{\texttt{K in E}\} \end{aligned}$$

Lineare Suche – Average-Case-Analyse

Endergebnis

Die Average-Case-Zeitkomplexität der linearen Suche ist:

$$A(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\Pr\{\texttt{K in E}\}\right) + \frac{1}{2}\Pr\{\texttt{K in E}\}$$

Beispiel

Wenn $\Pr\{K \text{ in } E\}$

- $= 1$, dann ist $A(n) = \frac{n+1}{2}$, d. h. etwa 50% von E ist überprüft.
- $= 0$, dann ist $A(n) = n = W(n)$, d. h. E wird komplett überprüft.
- $= \frac{1}{2}$, dann ist $A(n) = \frac{3 \cdot n}{4} + \frac{1}{4}$, d. h. etwa 75% von E wird überprüft.

Übersicht

Bilineare Suche

Statt eine Reihe in einer Richtung zu durchsuchen, kann man dies auch in beide Richtungen "zeitgleich".

Dies führt zur bilineare Suche.

```
1 bool bilinSearch(int E[], int n, int K) {
2   int left = 0, right = n - 1;
3   while (left <= right) {
4     if (E[left] == K || E[right] == K) {
5       return true;
6     }
7     left = left + 1;
8     right = right - 1;
9   }
10  return false; // nicht gefunden
11 }
```


Bilineare Suche – Analyse

Worst-Case Zeitkomplexität

Im schlimmsten Fall, wird die Schleife $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ mal durchlaufen.

Pro Schleife finden zwei Vergleiche `K == E[i]` statt.

Also $W(n) = 2 \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Best-Case Zeitkomplexität

$B(n) = 2$, da zwei Vergleiche reichen, wenn `K == E[1]` oder `K == E[n]`.

Average-Case Zeitkomplexität

Ähnlich wie für die lineare Suche.

Bilineare Suche

Vereinfachung wenn gegeben ist, dass `K` in `E` vorkommt, und wenn verzichtet wird auf Terminierung der Suche sobald `K` gefunden ist.

Weiterhin soll der Ausgabe `i` sein, sodaß `E[i] == K` gilt.

```
1 int bilinSearch(int E[], int n, int K) {
2   int left = 0, right = n - 1;
3   while (left != right) {
4     if (E[left] != K || E[right] == K) { left = left + 1; }
5     if (E[right] != K || E[left] == K) { right = right - 1; }
6     }
7   }
8   return left
9 }
```

Hausaufgabe: bestimmen Sie für dieses Programm $W(n)$ und $A(n)$.

Das Prominentensuche Problem

Das Prominentensuche Problem

Was ist ein Prominenter?

Ein Prominenter (celebrity) ist jemand den alle kennen, der jedoch selber keinen kennt.

Beispiel (Das Prominentensuche Problem)

Eingabe:
1. $n \in \mathbb{N}$ Personen nummeriert $0, \ldots, n-1$
2. Mindestens eine Person ist ein Prominenter
3. $n \times n$ boolean Matrix K, so dass für $0 \leqslant i, j < n$:

$$K[i,j] = \begin{cases} 1 & \text{falls Person } i \text{ kennt Person } j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ausgabe: Sei $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, so dass Person k Prominenter ist, d.h.:

$$\underbrace{\forall 0 \leqslant i < n.\, i \neq k \Rightarrow K[i,k]}_{\text{alle kennen Person } k} \text{ und } \underbrace{\forall 0 \leqslant i < n.\, i \neq k \Rightarrow \neg K[k,i]}_{\text{Person } k \text{ kennt niemandem}}$$

Beispiel: Wer ist ein Prominenter?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Wer ist ein Prominenter?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es ist einfach, einen Prominenten mit $W(n) \in O(n^2)$ zu bestimmen.

Geht es auch mit $W(n) \in O(n)$?

Das Prominentensuche Problem: Lineare Suche

Idee: starte eine Suche am `K[0,0]` und suche bis eine 1 gefunden wird in Zeile 0, Spalte $m \neq 0$.

Dann gilt: $\forall 0 \leqslant k < m.\, k$ ist kein Prominenter.

Die Suche geht dann weiter in Zeile m, Spalte m, usw.

```
1 int CelebritySearch(bool K[], int n) {
2   int row = 0; column = 0; // Reihe- und Spalte-index
3   while (row != n && column != n) {
4     if (row != column) {
5         if (!K[row,column]) { column = column + 1; }
6         if (K[row,column]) { row = column; }
7     } else { column = column + 1; } // row == column
8   }
9   return row
10 }
```


Das Prominentensuche Problem: Bilineare Suche

Einige Eigenschaften

Für alle $0 < i, j \leqslant n$ gilt:

1. $K[i,j] \Longrightarrow i$ ist kein Prominenter
2. $\neg K[j,i] \Longrightarrow i$ ist kein Prominenter

Aus dieser Eigenschaft folgt direkt folgende bilineare Suche im Array `K`:

```
1 int CelebritySearch(bool K[], int n) {
2   int row = 0, column = n - 1; // Reihe- und Spalte-index
3   while (row != column) {
4     if (K[row,column]) { row = row + 1; } // Property 1
5     if (!K[row,column]) { column = column - 1; } // Property 2
6     }
7   }
8   return row
9 }
```


Das Prominentensuche Problem

Zeitkomplexität

Es gilt $A(n), B(n), W(n) \in O(n)$.

Der Algorithmus kann leicht angepasst werden, damit er terminiert sobald ein Prominenter gefunden wurde.

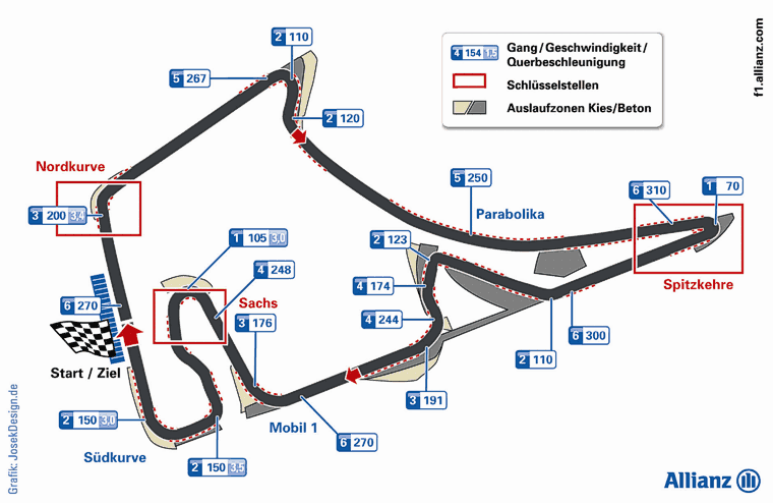
Dies ändert die asymptotische Zeitkomplexität $W(n)$ jedoch nicht.

Aufgabe:

Bestimmen Sie die Zeitkomplexität der linearen Suche für dieses Problem.

Das Boxenstopp Problem

Der Hockenheimring



Das Boxenstopp Problem

Beispiel (Das Boxenstopp Problem)

Eingabe:
1. $n \in \mathbb{N}$ Boxenstopps auf den Hockenheimring, rechts herum nummeriert 0 durch $n-1$.
2. Am Boxenstopp i stehen uns $T(i)$ Liter Benzin zur Verfügung
3. Um von Boxenstopp i nach $(i+1)$ **mod** n zu fahren braucht man $V(i)$ Liter Benzin
4. Gegeben: $\sum_{i=0}^{n-1} T(i) = \sum_{i=0}^{n-1} V(i)$

Ausgabe: Bestimme $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, so dass Michael Schumacher mit einem leeren Tank eine komplette Runde fahren kann.

Erwünschte Worst Case Zeitkomplexität: $O(n)$.

Das Boxenstopp Problem: Beispiel

Das Boxenstopp Problem

Differenzmatrix

Sei D eine $n \times n$ Integermatrix, so dass $D[i,j]$ die Differenz ist zwischen der Anzahl der Liter Benzin die zur Verfügung stehen und die man braucht um von Boxenstopp i (rechts herum) nach Boxenstopp j zu fahren.

$$D[i,j] = \sum_{m=i}^{j-1} T(m) - V(m).$$

Starting Boxenstopp

Boxenstopp k ist starting Boxenstopp gdw. $\forall 0 \leqslant i < n.\, D[k,i] \geqslant 0$

Das Boxenstopp Problem

Einige Eigenschaften

1. Für alle $0 \leqslant i, j < n$ gilt: $D[i,i] = 0$ und $D[i,j] + D[j,i] = 0$
2. Für alle $0 \leqslant i, j, m < n$ gilt: $D[i,m] = D[i,j] + D[j,m]$
3. k ist starting Boxenstopp gdw. $D[0,k]$ minimal ist
4. $D[i,j] > 0 \Longrightarrow j$ ist kein starting Boxenstopp

Das Boxenstopp Problem: Bilineare Suche

Mittels einer Hilfsvariable d bekommen wir jetzt folgenden Algorithmus:

```
1 int PitstopSearch(int V[], int T[], int n) {
2   int left = 0, right = n - 1;
3   int d = V[n-1] - T[n-1]; // d = D[0,n-1]
4   while (left != right) { // Invariant: d = D[left,right]
5     if (d <= 0) { left = left + 1; d = d + V[left] - T[left]; }
6     if (d >= 0) { right = right - 1;
7         d = d + V[right-1] - T[right-1];
8         }
9     }
10  return left
11 }
```

Es ist leicht festzustellen, dass $W(n) \in O(n)$, da die Schleife genau n Mal durchlaufen wird.

Übersicht

Binäre Suche

Suchen in einem sortierten Array

Eingabe: *Sortiertes* Array `E` mit `n` Einträgen, und das gesuchte Element `K`.

Ausgabe: Ist `K` in `E` enthalten?

Idee

Da `E` sortiert ist, können wir das gesuchte Element `K` schneller suchen.
Liegt `K` nicht in der Mitte von `E`, dann:

1. suche in der linken Hälfte von `E`, falls `K` $<$ `E[mid]`
2. suche in der rechten Hälfte von `E`, falls `K` $>$ `E[mid]`

Fazit:

Wir halbieren den Suchraum in jedem Durchlauf.

Binäre Suche – Beispiel

Binäre Suche

```
1 bool binSearch(int E[], int n, int K) {
2   int left = 0, right = n - 1;
3   while (left <= right) {
4     int mid = floor((left + right) / 2); // runde ab
5     if (E[mid] == K) { return true; }
6     if (E[mid] > K) { right = mid - 1; }
7     if (E[mid] < K) { left = mid + 1; }
8   }
9   return false;
10 }
```


Binäre Suche – Analyse

Lemma

Sei $r \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

1. $\lfloor r+n \rfloor = \lfloor r \rfloor + n$
2. $\lceil r+n \rceil = \lceil r \rceil + n$
3. $\lfloor -r \rfloor = -\lceil r \rceil$

Binäre Suche – Analyse

Abkürzungen: $m = \texttt{mid}$, $r = \texttt{right}$, $l = \texttt{left}$

Größe des undurchsuchten Arrays

Im nächsten Durchlauf ist die Größe des Arrays $m - l$ oder $r - m$.

Hierbei ist $m = \lfloor (l+r)/2 \rfloor$.

Die neue Größe ist also:

- $m - l = \lfloor (l+r)/2 \rfloor - l = \lfloor (r-l)/2 \rfloor = \lfloor (n-1)/2 \rfloor$
  oder
- $r - m = r - \lfloor (l+r)/2 \rfloor = \lceil (r-l)/2 \rceil = \lceil (n-1)/2 \rceil$

Im schlimmsten Fall ist die neue Größe des Arrays also:

$$\lceil (n-1)/2 \rceil$$

Rekursionsgleichung für Binäre Suche

Sei $S(n)$ die maximale Anzahl der Schleifendurchläufe bei einer erfolglosen Suche.

Wir erhalten die Rekursionsgleichung:

$$S(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0 \\ 1 + S(\lceil (n-1)/2 \rceil) & \text{falls } n > 0 \end{cases}$$

Die erste Werten sind:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$S(n)$	0	1	2	2	3	3	3	3	4

Wir suchen eine geschlossene Formel für $S(n)$

Lösen der Rekursionsgleichung

Betrachte den Spezialfall $n = 2^k - 1$.

Da die maximal Größe des Arrays $\lceil (n-1)/2 \rceil$ ist, leiten wir her:

$$\left\lceil \frac{(2^k - 1) - 1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{2^k - 2}{2} \right\rceil = \lceil 2^{k-1} - 1 \rceil = 2^{k-1} - 1.$$

Daher gilt für $k > 0$ nach der Definition $S(n) = 1 + S(\lceil (n-1)/2 \rceil)$, daß:

$$S(2^k - 1) = 1 + S(2^{k-1} - 1) \quad \text{und damit} \quad S(2^k - 1) = k + \underbrace{S(2^0 - 1)}_{=0} = k.$$

Binäre Suche – Analyse

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$S(n)$	0	1	2	2	3	3	3	3	4

Vermutung: $S(2^k) = 1 + S(2^{k-1})$.

$S(n)$ steigt monoton, also $S(n) = k$ falls $2^{k-1} \leqslant n < 2^k$.

Oder: falls $k - 1 \leqslant \log n < k$.

Dann ist $S(n) = \lfloor \log n \rfloor + 1$.

Binäre Suche – Analyse

Wir vermuten $S(n) = \lfloor \log n \rfloor + 1$ für $n > 0$

Induktion über n:

Basis: $S(1) = 1 = \lfloor \log 1 \rfloor + 1$

Induktionsschritt: Sei $n > 1$. Dann:

$$S(n) = 1 + S(\lceil (n-1)/2 \rceil) = 1 + \lfloor \log \lceil (n-1)/2 \rceil \rfloor + 1$$

Man kann zeigen (Hausaufgabe): $\lfloor \log \lceil (n-1)/2 \rceil \rfloor + 1 = \lfloor \log n \rfloor$.

Damit: $S(n) = \lfloor \log n \rfloor + 1$ für $n > 0$.

Binäre Suche – Analyse

Theorem

Die Worst Case Zeitkomplexität der binären Suche ist $W(n) = \lfloor \log n \rfloor + 1$.

Vergleich der Suchalgorithmen

Algorithmus	Zeitkomplexität	Vorteil	Nachteil
Lineare Suche	$O(n)$	einfach	langsam
Bilineare Suche	$O(n)$	einfach / elegant	langsam
Binäre Suche	$O(\log n)$	schnell	sortiertes Array ($O(n \cdot \log n)$ Initialisierungsaufwand)