

Datenstrukturen und Algorithmen

Vorlesung 6: Mastertheorem (K4)

Joost-Pieter Katoen

Lehrstuhl für Informatik 2
Software Modeling and Verification Group

<http://www-i2.informatik.rwth-aachen.de/i2/dsa112/>

24. April 2012

Übersicht

1 Lösen von Rekursionsgleichungen

- Substitutionsmethode
- Rekursionsbäume
- Mastertheorem

Übersicht

1 Lösen von Rekursionsgleichungen

- Substitutionsmethode
- Rekursionsbäume
- Mastertheorem

Rekursionsgleichungen

Rekursionsgleichung

Für rekursive Algorithmen wird die Laufzeit meistens durch [Rekursionsgleichungen](#) beschrieben.

Rekursionsgleichungen

Rekursionsgleichung

Für rekursive Algorithmen wird die Laufzeit meistens durch **Rekursionsgleichungen** beschrieben.

Eine **Rekursionsgleichung** ist eine Gleichung oder eine Ungleichung, die eine Funktion durch ihre eigenen Funktionswerte für kleinere Eingaben beschreibt.

Rekursionsgleichungen

Rekursionsgleichung

Für rekursive Algorithmen wird die Laufzeit meistens durch **Rekursionsgleichungen** beschrieben.

Eine **Rekursionsgleichung** ist eine Gleichung oder eine Ungleichung, die eine Funktion durch ihre eigenen Funktionswerte für kleinere Eingaben beschreibt.

Beispiele

- | | |
|---|---------------------------------|
| ▶ $T(n) = T(\lceil (n-1)/2 \rceil) + 1$ | Binäre Suche |
| ▶ $T(n) = T(n-1) + n - 1$ | Bubblesort |
| ▶ $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + n - 1$ | Mergesort |
| ▶ $T(n) = 7 \cdot T(n/2) + c \cdot n^2$ | Strassen's Matrixmultiplikation |

Die zentrale Frage ist: Wie **löst** man solche Rekursionsgleichungen?

Die Substitutionsmethode

Substitutionsmethode

Die Substitutionsmethode besteht aus zwei Schritten:

1. **Rate** die Form der Lösung, durch z.B.:
 - ▶ Scharfes Hinsehen, kurze Eingaben ausprobieren und einsetzen
 - ▶ Betrachtung des Rekursionsbaum

Die Substitutionsmethode

Substitutionsmethode

Die Substitutionsmethode besteht aus zwei Schritten:

1. **Rate** die Form der Lösung, durch z.B.:
 - ▶ Scharfes Hinsehen, kurze Eingaben ausprobieren und einsetzen
 - ▶ Betrachtung des Rekursionsbaum
2. **Vollständige Induktion** um die Konstanten zu finden und zu zeigen, dass die Lösung funktioniert.

Die Substitutionsmethode: Beispiel

Beispiel

Betrachte folgende Rekursionsgleichung:

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = 2 \cdot T(n/2) + n \quad \text{für } n > 1.$$

Die Substitutionsmethode: Beispiel

Beispiel

Betrachte folgende Rekursionsgleichung:

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = 2 \cdot T(n/2) + n \quad \text{für } n > 1.$$

- Wir vermuten als Lösung $T(n) \in O(n \cdot \log n)$.

Die Substitutionsmethode: Beispiel

Beispiel

Betrachte folgende Rekursionsgleichung:

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = 2 \cdot T(n/2) + n \quad \text{für } n > 1.$$

- ▶ Wir vermuten als Lösung $T(n) \in O(n \cdot \log n)$.
- ▶ Dazu müssen wir $T(n) \leq c \cdot n \cdot \log n$ zeigen, für geeignete $c > 0$.

Die Substitutionsmethode: Beispiel

Beispiel

Betrachte folgende Rekursionsgleichung:

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = 2 \cdot T(n/2) + n \quad \text{für } n > 1.$$

- ▶ Wir vermuten als Lösung $T(n) \in O(n \cdot \log n)$.
- ▶ Dazu müssen wir $T(n) \leq c \cdot n \cdot \log n$ zeigen, für geeignete $c > 0$.
- ▶ Bestimme ob für ein geeignetes n_0 , für $n \geq n_0$, $T(n) \leq c \cdot n \cdot \log n$ gilt.

Die Substitutionsmethode: Beispiel

Beispiel

Betrachte folgende Rekursionsgleichung:

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = 2 \cdot T(n/2) + n \quad \text{für } n > 1.$$

- ▶ Wir vermuten als Lösung $T(n) \in O(n \cdot \log n)$.
- ▶ Dazu müssen wir $T(n) \leq c \cdot n \cdot \log n$ zeigen, für geeignete $c > 0$.
- ▶ Bestimme ob für ein geeignetes n_0 , für $n \geq n_0$, $T(n) \leq c \cdot n \cdot \log n$ gilt.
- ▶ Stelle fest, dass $T(1) = 1 \leq c \cdot 1 \cdot \log 1 = 0$ **verletzt** ist.

Die Substitutionsmethode: Beispiel

Beispiel

Betrachte folgende Rekursionsgleichung:

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = 2 \cdot T(n/2) + n \quad \text{für } n > 1.$$

- ▶ Wir vermuten als Lösung $T(n) \in O(n \cdot \log n)$.
- ▶ Dazu müssen wir $T(n) \leq c \cdot n \cdot \log n$ zeigen, für geeignete $c > 0$.
- ▶ Bestimme ob für ein geeignetes n_0 , für $n \geq n_0$, $T(n) \leq c \cdot n \cdot \log n$ gilt.
- ▶ Stelle fest, dass $T(1) = 1 \leq c \cdot 1 \cdot \log 1 = 0$ **verletzt** ist.
- ▶ Es gilt: $T(2) = 4 \leq c \cdot 2 \log 2$ und $T(3) = 5 \leq c \cdot 3 \log 3$ für $c > 1$

Die Substitutionsmethode: Beispiel

Beispiel

Betrachte folgende Rekursionsgleichung:

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = 2 \cdot T(n/2) + n \quad \text{für } n > 1.$$

- ▶ Wir vermuten als Lösung $T(n) \in O(n \cdot \log n)$.
- ▶ Dazu müssen wir $T(n) \leq c \cdot n \cdot \log n$ zeigen, für geeignete $c > 0$.
- ▶ Bestimme ob für ein geeignetes n_0 , für $n \geq n_0$, $T(n) \leq c \cdot n \cdot \log n$ gilt.
- ▶ Stelle fest, dass $T(1) = 1 \leq c \cdot 1 \cdot \log 1 = 0$ **verletzt** ist.
- ▶ Es gilt: $T(2) = 4 \leq c \cdot 2 \log 2$ und $T(3) = 5 \leq c \cdot 3 \log 3$ für $c > 1$
- ▶ **Überprüfe** dann durch Substitution und Induktion (s. nächste Folie)

Die Substitutionsmethode: Beispiel

Beispiel

Betrachte folgende Rekursionsgleichung:

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = 2 \cdot T(n/2) + n \quad \text{für } n > 1.$$

- ▶ Wir vermuten als Lösung $T(n) \in O(n \cdot \log n)$.
- ▶ Dazu müssen wir $T(n) \leq c \cdot n \cdot \log n$ zeigen, für geeignete $c > 0$.
- ▶ Bestimme ob für ein geeignetes n_0 , für $n \geq n_0$, $T(n) \leq c \cdot n \cdot \log n$ gilt.
- ▶ Stelle fest, dass $T(1) = 1 \leq c \cdot 1 \cdot \log 1 = 0$ **verletzt** ist.
- ▶ Es gilt: $T(2) = 4 \leq c \cdot 2 \log 2$ und $T(3) = 5 \leq c \cdot 3 \log 3$ für $c > 1$
- ▶ **Überprüfe** dann durch Substitution und Induktion (s. nächste Folie)
- ▶ Damit gilt für jedes $c > 1$ und $n \geq n_0 > 1$, dass **$T(n) \leq c \cdot n \cdot \log n$** .

Die Substitutionsmethode: Beispiel

Beispiel

$$T(n) = 2 \cdot T(n/2) + n \text{ für } n > 1, \text{ und } T(1) = 1$$

$$T(n) = 2 \cdot T(n/2) + n \quad | \text{ Induktionshypothese}$$

$$\leq 2(c \cdot n/2 \cdot \log n/2) + n$$

$$= c \cdot n \cdot \log n/2 + n$$

$$\begin{array}{l} | \text{ log-Rechnung: } (\log \equiv \log_2) \\ | \log n/2 = \log n - \log 2 \end{array}$$

$$= c \cdot n \cdot \log n - c \cdot n \cdot \log 2 + n$$

$$\leq c \cdot n \cdot \log n - c \cdot n + n$$

$$| \text{ mit } c > 1 \text{ folgt sofort:}$$

$$\leq c \cdot n \cdot \log n$$

Raten der Lösung durch Iteration

Grundidee

Wiederholtes Einsetzen der Rekursionsgleichung in sich selbst, bis man ein Muster erkennt.

Raten der Lösung durch Iteration

Grundidee

Wiederholtes Einsetzen der Rekursionsgleichung in sich selbst, bis man ein Muster erkennt.

Beispiel

$$\begin{aligned}T(n) &= 3 \cdot T(n/4) + n && | \text{ Einsetzen} \\&= 3 \cdot (3 \cdot T(n/16) + n/4) + n && | \text{ Nochmal einsetzen} \\&= 9 \cdot (3 \cdot T(n/64) + n/16) + 3 \cdot n/4 + n && | \text{ Vereinfachen} \\&= 27 \cdot T(n/64) + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot n + \left(\frac{3}{4}\right)^1 \cdot n + \left(\frac{3}{4}\right)^0 \cdot n\end{aligned}$$

Raten der Lösung durch Iteration

Grundidee

Wiederholtes Einsetzen der Rekursionsgleichung in sich selbst, bis man ein Muster erkennt.

Beispiel

$$\begin{aligned}T(n) &= 3 \cdot T(n/4) + n && | \text{ Einsetzen} \\&= 3 \cdot (3 \cdot T(n/16) + n/4) + n && | \text{ Nochmal einsetzen} \\&= 9 \cdot (3 \cdot T(n/64) + n/16) + 3 \cdot n/4 + n && | \text{ Vereinfachen} \\&= 27 \cdot T(n/64) + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot n + \left(\frac{3}{4}\right)^1 \cdot n + \left(\frac{3}{4}\right)^0 \cdot n\end{aligned}$$

Wir nehmen $T(1) = c$ an und erhalten: $T(n) = \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} \left(\frac{3}{4}\right)^i \cdot n + c \cdot n^{\log_4 3}$

Raten der Lösung durch Iteration

Grundidee

Wiederholtes Einsetzen der Rekursionsgleichung in sich selbst, bis man ein Muster erkennt.

Beispiel

$$\begin{aligned}T(n) &= 3 \cdot T(n/4) + n && | \text{ Einsetzen} \\&= 3 \cdot (3 \cdot T(n/16) + n/4) + n && | \text{ Nochmal einsetzen} \\&= 9 \cdot (3 \cdot T(n/64) + n/16) + 3 \cdot n/4 + n && | \text{ Vereinfachen} \\&= 27 \cdot T(n/64) + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot n + \left(\frac{3}{4}\right)^1 \cdot n + \left(\frac{3}{4}\right)^0 \cdot n\end{aligned}$$

Wir nehmen $T(1) = c$ an und erhalten: $T(n) = \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} \left(\frac{3}{4}\right)^i \cdot n + c \cdot n^{\log_4 3}$

Diese Aussage kann mit Hilfe der Substitutionsmethode gezeigt werden.

Raten der Lösung durch Rekursionsbäume

Grundidee

Stelle das Ineinander-Einsetzen als Baum dar, indem man Buch über das **aktuelle Rekursionsargument** und **die nichtrekursiven Kosten** führt.

Raten der Lösung durch Rekursionsbäume

Grundidee

Stelle das Ineinander-Einsetzen als Baum dar, indem man Buch über das **aktuelle Rekursionsargument** und **die nichtrekursiven Kosten** führt.

Rekursionsbaum

1. Jeder **Knoten** stellt die Kosten eines Teilproblems dar.

Raten der Lösung durch Rekursionsbäume

Grundidee

Stelle das Ineinander-Einsetzen als Baum dar, indem man Buch über das **aktuelle Rekursionsargument** und **die nichtrekursiven Kosten** führt.

Rekursionsbaum

1. Jeder **Knoten** stellt die Kosten eines Teilproblems dar.
 - ▶ Die Wurzel stellt die zu analysierenden Kosten $T(n)$ dar.

Raten der Lösung durch Rekursionsbäume

Grundidee

Stelle das Ineinander-Einsetzen als Baum dar, indem man Buch über das **aktuelle Rekursionsargument** und **die nichtrekursiven Kosten** führt.

Rekursionsbaum

1. Jeder **Knoten** stellt die Kosten eines Teilproblems dar.
 - ▶ Die Wurzel stellt die zu analysierenden Kosten $T(n)$ dar.
 - ▶ Die Blätter stellen die Kosten der Basisfälle dar, z.B. $T(0)$ oder $T(1)$.

Raten der Lösung durch Rekursionsbäume

Grundidee

Stelle das Ineinander-Einsetzen als Baum dar, indem man Buch über das **aktuelle Rekursionsargument** und **die nichtrekursiven Kosten** führt.

Rekursionsbaum

1. Jeder **Knoten** stellt die Kosten eines Teilproblems dar.
 - ▶ Die Wurzel stellt die zu analysierenden Kosten $T(n)$ dar.
 - ▶ Die Blätter stellen die Kosten der Basisfälle dar, z.B. $T(0)$ oder $T(1)$.
2. Wir summieren die Kosten innerhalb jeder **Ebene** des Baumes.

Raten der Lösung durch Rekursionsbäume

Grundidee

Stelle das Ineinander-Einsetzen als Baum dar, indem man Buch über das **aktuelle Rekursionsargument** und **die nichtrekursiven Kosten** führt.

Rekursionsbaum

1. Jeder **Knoten** stellt die Kosten eines Teilproblems dar.
 - ▶ Die Wurzel stellt die zu analysierenden Kosten $T(n)$ dar.
 - ▶ Die Blätter stellen die Kosten der Basisfälle dar, z.B. $T(0)$ oder $T(1)$.
2. Wir summieren die Kosten innerhalb jeder **Ebene** des Baumes.
3. Die **Gesamtkosten** := summieren über **die Kosten aller Ebenen**.

Raten der Lösung durch Rekursionsbäume

Grundidee

Stelle das Ineinander-Einsetzen als Baum dar, indem man Buch über das **aktuelle Rekursionsargument** und **die nichtrekursiven Kosten** führt.

Rekursionsbaum

1. Jeder **Knoten** stellt die Kosten eines Teilproblems dar.
 - ▶ Die Wurzel stellt die zu analysierenden Kosten $T(n)$ dar.
 - ▶ Die Blätter stellen die Kosten der Basisfälle dar, z.B. $T(0)$ oder $T(1)$.
2. Wir summieren die Kosten innerhalb jeder **Ebene** des Baumes.
3. Die **Gesamtkosten** := summieren über **die Kosten aller Ebenen**.

Wichtiger Hinweis

Ein Rekursionsbaum ist sehr nützlich, um eine Lösung zu raten, die dann mit Hilfe der Substitutionsmethode überprüft werden kann.

Raten der Lösung durch Rekursionsbäume

Grundidee

Stelle das Ineinander-Einsetzen als Baum dar, indem man Buch über **das aktuelle Rekursionsargument** und **die nichtrekursiven Kosten** führt.

Rekursionsbaum

1. Jeder **Knoten** stellt die Kosten eines Teilproblems dar.
 - ▶ Die Wurzel stellt die zu analysierenden Kosten $T(n)$ dar.
 - ▶ Die Blätter stellen die Kosten der Basisfälle dar, z.B. $T(0)$ oder $T(1)$.
2. Wir summieren die Kosten innerhalb jeder **Ebene** des Baumes.
3. Die **Gesamtkosten** := summieren über **die Kosten aller Ebenen**.

Wichtiger Hinweis

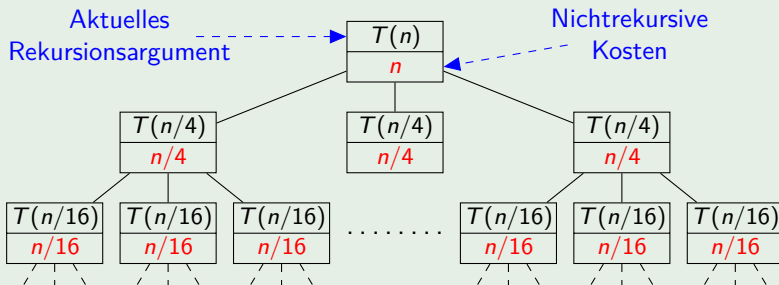
Ein Rekursionsbaum ist sehr nützlich, um eine Lösung zu raten, die dann mit Hilfe der Substitutionsmethode überprüft werden kann.

Der Baum selber reicht jedoch meistens nicht als Beweis.

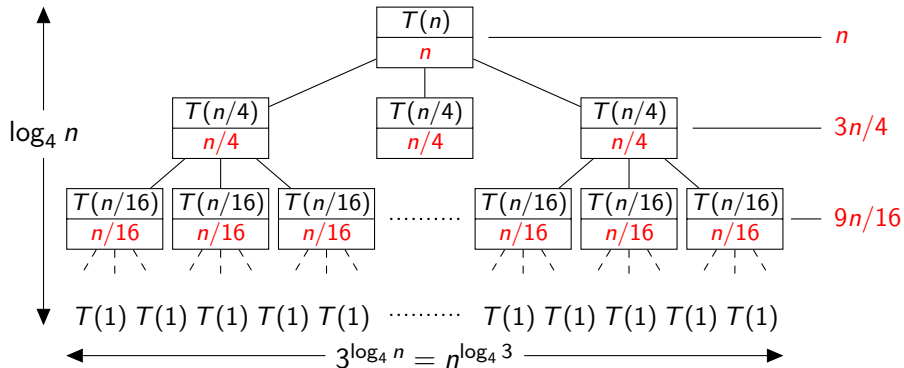
Rekursionsbaum: Beispiel

Beispiel

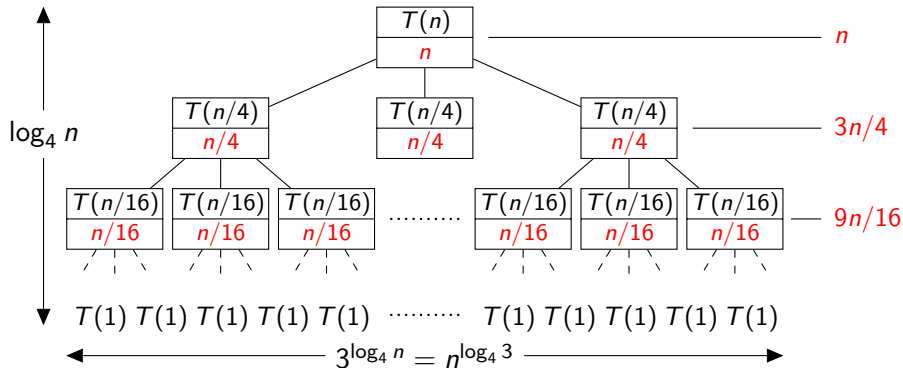
Der Rekursionsbaum von $T(n) = 3 \cdot T(n/4) + n$ sieht etwa so aus:



Rekursionsbaum: Beispiel



Rekursionsbaum: Beispiel



$$T(n) = \underbrace{\sum_{i=0}^{\log_4 n - 1}}_{\text{Summe über alle Ebenen}} \underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^i \cdot n}_{\text{Kosten pro Ebene}} + \underbrace{c \cdot n^{\log_4 3}}_{\text{Gesamtkosten für die Blätter mit } T(1) = c}$$

Rekursionsbaum: Beispiel

Eine obere Schranke für die Komplexität erhält man nun folgendermaßen:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} \left(\frac{3}{4}\right)^i \cdot n + c \cdot n^{\log_4 3} \quad | \text{ Vernachlässigen kleinerer Terme}$$

$$< \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i \cdot n + c \cdot n^{\log_4 3} \quad | \text{ Geometrische Reihe}$$

$$< \frac{1}{1 - (3/4)} \cdot n + c \cdot n^{\log_4 3} \quad | \text{ Umformen}$$

$$< 4 \cdot n + c \cdot n^{\log_4 3} \quad | \text{ Asymptotische Ordnung bestimmen}$$

setze ein, dass $\log_4 3 < 1$

$$T(n) \in O(n).$$

Korrektheit

Wir können die Substitutionsmethode benutzen, um die Vermutung zu bestätigen dass:

$T(n) \in O(n)$ eine obere Schranke von $T(n) = 3 \cdot T(n/4) + n$ ist.

Korrektheit

Wir können die Substitutionsmethode benutzen, um die Vermutung zu bestätigen dass:

$T(n) \in O(n)$ eine obere Schranke von $T(n) = 3 \cdot T(n/4) + n$ ist.

$$T(n) = 3 \cdot T(n/4) + n \quad | \text{ Induktionshypothese}$$

$$\leq 3d \cdot n/4 + n$$

$$= \frac{3}{4}d \cdot n + n$$

$$= \left(\frac{3}{4}d + 1 \right) \cdot n \quad | \text{ mit } d \geq 4 \text{ folgt sofort:}$$

$$\leq d \cdot n$$

Korrektheit

Wir können die Substitutionsmethode benutzen, um die Vermutung zu bestätigen dass:

$T(n) \in O(n)$ eine obere Schranke von $T(n) = 3 \cdot T(n/4) + n$ ist.

$$T(n) = 3 \cdot T(n/4) + n \quad | \text{ Induktionshypothese}$$

$$\leq 3d \cdot n/4 + n$$

$$= \frac{3}{4}d \cdot n + n$$

$$= \left(\frac{3}{4}d + 1 \right) \cdot n \quad | \text{ mit } d \geq 4 \text{ folgt sofort:}$$

$$\leq d \cdot n$$

Und wir stellen fest, dass es ein n_0 gibt, so dass $T(n_0) \leq d \cdot n_0$ ist.

Mastertheorem

Allgemeine Format der Rekursionsgleichung

Eine Rekursionsgleichung für die Komplexitätsanalyse sieht meistens folgendermaßen aus:

$$T(n) = b \cdot T\left(\frac{n}{c}\right) + f(n)$$

wobei $b > 0$, $c > 1$ gilt und $f(n)$ eine gegebene Funktion ist.

Mastertheorem

Allgemeine Format der Rekursionsgleichung

Eine Rekursionsgleichung für die Komplexitätsanalyse sieht meistens folgendermaßen aus:

$$T(n) = b \cdot T\left(\frac{n}{c}\right) + f(n)$$

wobei $b > 0$, $c > 1$ gilt und $f(n)$ eine gegebene Funktion ist.

Intuition:

- ▶ Das zu analysierende Problem teilt sich jeweils in b Teilprobleme auf

Mastertheorem

Allgemeine Format der Rekursionsgleichung

Eine Rekursionsgleichung für die Komplexitätsanalyse sieht meistens folgendermaßen aus:

$$T(n) = b \cdot T\left(\frac{n}{c}\right) + f(n)$$

wobei $b > 0$, $c > 1$ gilt und $f(n)$ eine gegebene Funktion ist.

Intuition:

- ▶ Das zu analysierende Problem teilt sich jeweils in b Teilprobleme auf
- ▶ Jedes dieser Teilprobleme hat die Größe $\frac{n}{c}$

Mastertheorem

Allgemeine Format der Rekursionsgleichung

Eine Rekursionsgleichung für die Komplexitätsanalyse sieht meistens folgendermaßen aus:

$$T(n) = b \cdot T\left(\frac{n}{c}\right) + f(n)$$

wobei $b > 0$, $c > 1$ gilt und $f(n)$ eine gegebene Funktion ist.

Intuition:

- ▶ Das zu analysierende Problem teilt sich jeweils in b Teilprobleme auf
- ▶ Jedes dieser Teilprobleme hat die Größe $\frac{n}{c}$
- ▶ Die Kosten für das Aufteilen eines Problems und Kombinieren der Teillösungen sind $f(n)$.

Das Mastertheorem

$$T(n) = b \cdot T\left(\frac{n}{c}\right) + f(n) \text{ mit } b \geq 1 \text{ und } c > 1.$$

- Anzahl der Blätter im Rekursionsbaum: n^E mit $E = \log b / \log c$.

Das Mastertheorem

$$T(n) = b \cdot T\left(\frac{n}{c}\right) + f(n) \quad \text{mit } b \geq 1 \text{ und } c > 1.$$

- Anzahl der Blätter im Rekursionsbaum: n^E mit $E = \log b / \log c$.

Mastertheorem

Wenn

Dann

1. $f(n) \in O(n^{E-\varepsilon})$ für ein $\varepsilon > 0$

$$T(n) \in \Theta(n^E)$$

Das Mastertheorem

$$T(n) = b \cdot T\left(\frac{n}{c}\right) + f(n) \quad \text{mit } b \geq 1 \text{ und } c > 1.$$

- Anzahl der Blätter im Rekursionsbaum: n^E mit $E = \log b / \log c$.

Mastertheorem

Wenn

Dann

1. $f(n) \in O(n^{E-\varepsilon})$ für ein $\varepsilon > 0$

$$T(n) \in \Theta(n^E)$$

2. $f(n) \in \Theta(n^E)$

$$T(n) \in \Theta(n^E \cdot \log n)$$

Das Mastertheorem

$$T(n) = b \cdot T\left(\frac{n}{c}\right) + f(n) \quad \text{mit } b \geq 1 \text{ und } c > 1.$$

- Anzahl der Blätter im Rekursionsbaum: n^E mit $E = \log b / \log c$.

Mastertheorem

Wenn

Dann

1. $f(n) \in O(n^{E-\varepsilon})$ für ein $\varepsilon > 0$
2. $f(n) \in \Theta(n^E)$
3. $f(n) \in \Omega(n^{E+\varepsilon})$ für ein $\varepsilon > 0$ und $b \cdot f(n/c) \leq d \cdot f(n)$ für $d < 1$ und n hinreichend groß

- $T(n) \in \Theta(n^E)$
- $T(n) \in \Theta(n^E \cdot \log n)$
- $T(n) \in \Theta(f(n))$

Das Mastertheorem

$$T(n) = b \cdot T\left(\frac{n}{c}\right) + f(n) \quad \text{mit } b \geq 1 \text{ und } c > 1.$$

- Anzahl der Blätter im Rekursionsbaum: n^E mit $E = \log b / \log c$.

Mastertheorem

Wenn

Dann

- | | |
|---|-------------------------------------|
| 1. $f(n) \in O(n^{E-\varepsilon})$ für ein $\varepsilon > 0$ | $T(n) \in \Theta(n^E)$ |
| 2. $f(n) \in \Theta(n^E)$ | $T(n) \in \Theta(n^E \cdot \log n)$ |
| 3. $f(n) \in \Omega(n^{E+\varepsilon})$ für ein $\varepsilon > 0$ und
$b \cdot f(n/c) \leq d \cdot f(n)$ für $d < 1$ und
n hinreichend groß | $T(n) \in \Theta(f(n))$ |

- Bemerke, dass das Mastertheorem nicht alle Fälle abdeckt.

Das Mastertheorem verstehen

In jedem der 3 Fälle wird die Funktion $f(n)$ mit $n^E = n^{\log_c b}$ verglichen.

Das Mastertheorem verstehen

In jedem der 3 Fälle wird die Funktion $f(n)$ mit $n^E = n^{\log_c b}$ verglichen.

Mastertheorem: Intuition

Wenn

Dann

1. $f(n)$ polynomial kleiner ist als n^E

$T(n) \in \Theta(n^E)$

Das Mastertheorem verstehen

In jedem der 3 Fälle wird die Funktion $f(n)$ mit $n^E = n^{\log_c b}$ verglichen.

Mastertheorem: Intuition

Wenn

Dann

- | | |
|---|-------------------------------------|
| 1. $f(n)$ polynomial kleiner ist als n^E | $T(n) \in \Theta(n^E)$ |
| 2. $f(n)$ und n^E die gleiche Größe haben | $T(n) \in \Theta(n^E \cdot \log n)$ |

Das Mastertheorem verstehen

In jedem der 3 Fälle wird die Funktion $f(n)$ mit $n^E = n^{\log_c b}$ verglichen.

Mastertheorem: Intuition

Wenn

Dann

- | | |
|--|-------------------------------------|
| 1. $f(n)$ polynomial kleiner ist als n^E | $T(n) \in \Theta(n^E)$ |
| 2. $f(n)$ und n^E die gleiche Größe haben | $T(n) \in \Theta(n^E \cdot \log n)$ |
| 3. $f(n)$ ist polynomial größer als n^E und erfüllt $b \cdot f(n/c) \leq d \cdot f(n)$ | $T(n) \in \Theta(f(n))$ |

Nicht abgedeckte Fälle:

1. $f(n)$ ist kleiner als n^E , jedoch nicht polynomiell kleiner.
2. $f(n)$ ist größer als n^E , jedoch nicht polynomiell größer.
3. $f(n)$ ist polynomiell größer als n^E , erfüllt nicht $b \cdot f(n/c) \leq d \cdot f(n)$.

Anwendung des Mastertheorems

Beispiel

$$T(n) = 4 \cdot T(n/2) + n$$

Anwendung des Mastertheorems

Beispiel

$$T(n) = 4 \cdot T(n/2) + n$$

- Somit: $b = 4$, $c = 2$ und $f(n) = n$; $E = \log 4 / \log 2 = 2$.

Anwendung des Mastertheorems

Beispiel

$$T(n) = 4 \cdot T(n/2) + n$$

- ▶ Somit: $b = 4$, $c = 2$ und $f(n) = n$; $E = \log 4 / \log 2 = 2$.
- ▶ Da $f(n) = n \in O(n^{2-\varepsilon})$, gilt Fall 1: $T(n) \in \Theta(n^2)$

Anwendung des Mastertheorems

Beispiel

$$T(n) = 4 \cdot T(n/2) + n$$

- ▶ Somit: $b = 4$, $c = 2$ und $f(n) = n$; $E = \log 4 / \log 2 = 2$.
- ▶ Da $f(n) = n \in O(n^{2-\varepsilon})$, gilt Fall 1: $T(n) \in \Theta(n^2)$

Beispiel

$$T(n) = 4 \cdot T(n/2) + n^2$$

Anwendung des Mastertheorems

Beispiel

$$T(n) = 4 \cdot T(n/2) + n$$

- ▶ Somit: $b = 4$, $c = 2$ und $f(n) = n$; $E = \log 4 / \log 2 = 2$.
- ▶ Da $f(n) = n \in O(n^{2-\varepsilon})$, gilt Fall 1: $T(n) \in \Theta(n^2)$

Beispiel

$$T(n) = 4 \cdot T(n/2) + n^2$$

- ▶ Somit: $b = 4$, $c = 2$ und $f(n) = n^2$; $E = \log 4 / \log 2 = 2$.

Anwendung des Mastertheorems

Beispiel

$$T(n) = 4 \cdot T(n/2) + n$$

- ▶ Somit: $b = 4$, $c = 2$ und $f(n) = n$; $E = \log 4 / \log 2 = 2$.
- ▶ Da $f(n) = n \in O(n^{2-\varepsilon})$, gilt Fall 1: $T(n) \in \Theta(n^2)$

Beispiel

$$T(n) = 4 \cdot T(n/2) + n^2$$

- ▶ Somit: $b = 4$, $c = 2$ und $f(n) = n^2$; $E = \log 4 / \log 2 = 2$.
- ▶ Da $f(n) = n^2 \notin O(n^{2-\varepsilon})$, gilt Fall 1 nicht.

Anwendung des Mastertheorems

Beispiel

$$T(n) = 4 \cdot T(n/2) + n$$

- ▶ Somit: $b = 4$, $c = 2$ und $f(n) = n$; $E = \log 4 / \log 2 = 2$.
- ▶ Da $f(n) = n \in O(n^{2-\varepsilon})$, gilt Fall 1: $T(n) \in \Theta(n^2)$

Beispiel

$$T(n) = 4 \cdot T(n/2) + n^2$$

- ▶ Somit: $b = 4$, $c = 2$ und $f(n) = n^2$; $E = \log 4 / \log 2 = 2$.
- ▶ Da $f(n) = n^2 \notin O(n^{2-\varepsilon})$, gilt Fall 1 nicht.
- ▶ Aber weil $f(n) = n^2 \in \Theta(n^2)$, gilt Fall 2: $T(n) \in \Theta(n^2 \cdot \log n)$

Anwendung des Mastertheorems

Beispiel

$$T(n) = 4 \cdot T(n/2) + n^3$$

Anwendung des Mastertheorems

Beispiel

$$T(n) = 4 \cdot T(n/2) + n^3$$

- Somit: $b = 4$, $c = 2$ und $f(n) = n^3$; $E = \log 4 / \log 2 = 2$.

Anwendung des Mastertheorems

Beispiel

$$T(n) = 4 \cdot T(n/2) + n^3$$

- ▶ Somit: $b = 4$, $c = 2$ und $f(n) = n^3$; $E = \log 4 / \log 2 = 2$.
- ▶ Wegen $E = 2$ gelten Fälle 1 und 2 offenbar **nicht**.

Anwendung des Mastertheorems

Beispiel

$$T(n) = 4 \cdot T(n/2) + n^3$$

- ▶ Somit: $b = 4$, $c = 2$ und $f(n) = n^3$; $E = \log 4 / \log 2 = 2$.
- ▶ Wegen $E = 2$ gelten Fälle 1 und 2 offenbar **nicht**.
- ▶ Da $f(n) = n^3 \in \Omega(n^{2+\varepsilon})$ für $\varepsilon = 1$, könnte Fall 3 gelten.

Anwendung des Mastertheorems

Beispiel

$$T(n) = 4 \cdot T(n/2) + n^3$$

- ▶ Somit: $b = 4$, $c = 2$ und $f(n) = n^3$; $E = \log 4 / \log 2 = 2$.
- ▶ Wegen $E = 2$ gelten Fälle 1 und 2 offenbar **nicht**.
- ▶ Da $f(n) = n^3 \in \Omega(n^{2+\varepsilon})$ für $\varepsilon = 1$, könnte Fall 3 gelten.
- ▶ Überprüfe: gilt $f(n/2) \leq \frac{d}{4} \cdot f(n)$ für $d < 1$ und hinreichend grosse n ?

Anwendung des Mastertheorems

Beispiel

$$T(n) = 4 \cdot T(n/2) + n^3$$

- ▶ Somit: $b = 4$, $c = 2$ und $f(n) = n^3$; $E = \log 4 / \log 2 = 2$.
- ▶ Wegen $E = 2$ gelten Fälle 1 und 2 offenbar **nicht**.
- ▶ Da $f(n) = n^3 \in \Omega(n^{2+\varepsilon})$ für $\varepsilon = 1$, könnte Fall 3 gelten.
- ▶ Überprüfe: gilt $f(n/2) \leq \frac{d}{4} \cdot f(n)$ für $d < 1$ und hinreichend grosse n ?
- ▶ Dies liefert $\frac{1}{8}n^3 \leq \frac{d}{4} \cdot n^3$, und dies gilt für alle $\frac{1}{2} \leq d < 1$ (und n)

Anwendung des Mastertheorems

Beispiel

$$T(n) = 4 \cdot T(n/2) + n^3$$

- ▶ Somit: $b = 4$, $c = 2$ und $f(n) = n^3$; $E = \log 4 / \log 2 = 2$.
- ▶ Wegen $E = 2$ gelten Fälle 1 und 2 offenbar **nicht**.
- ▶ Da $f(n) = n^3 \in \Omega(n^{2+\varepsilon})$ für $\varepsilon = 1$, könnte Fall 3 gelten.
- ▶ Überprüfe: gilt $f(n/2) \leq \frac{d}{4} \cdot f(n)$ für $d < 1$ und hinreichend grosse n ?
- ▶ Dies liefert $\frac{1}{8}n^3 \leq \frac{d}{4} \cdot n^3$, und dies gilt für alle $\frac{1}{2} \leq d < 1$ (und n)
- ▶ Somit gilt Fall 3 tatsächlich und wir folgern:

$$T(n) \in \Theta(n^3)$$

Das Mastertheorem ist nicht immer anwendbar

Beispiel

$$T(n) = 4 \cdot T(n/2) + \frac{n^2}{\log n}$$

Das Mastertheorem ist nicht immer anwendbar

Beispiel

$$T(n) = 4 \cdot T(n/2) + \frac{n^2}{\log n}$$

- ▶ Also gilt: $b = 4$, $c = 2$ und $f(n) = n^2 / \log n$; $E = 2$.

Das Mastertheorem ist nicht immer anwendbar

Beispiel

$$T(n) = 4 \cdot T(n/2) + \frac{n^2}{\log n}$$

- Also gilt: $b = 4$, $c = 2$ und $f(n) = n^2 / \log n$; $E = 2$.

Fall 1 ist **nicht** anwendbar:

$$n^2 / \log n \notin O(n^{2-\varepsilon}), \text{ da } f(n)/n^2 = (\log n)^{-1} \notin O(n^{-\varepsilon}).$$

Das Mastertheorem ist nicht immer anwendbar

Beispiel

$$T(n) = 4 \cdot T(n/2) + \frac{n^2}{\log n}$$

► Also gilt: $b = 4$, $c = 2$ und $f(n) = n^2 / \log n$; $E = 2$.

Fall 1 ist **nicht** anwendbar:

$$n^2 / \log n \notin O(n^{2-\varepsilon}), \text{ da } f(n)/n^2 = (\log n)^{-1} \notin O(n^{-\varepsilon}).$$

Fall 2 ist **nicht** anwendbar: $n^2 / \log n \notin \Theta(n^2)$.

Das Mastertheorem ist nicht immer anwendbar

Beispiel

$$T(n) = 4 \cdot T(n/2) + \frac{n^2}{\log n}$$

► Also gilt: $b = 4$, $c = 2$ und $f(n) = n^2 / \log n$; $E = 2$.

Fall 1 ist **nicht** anwendbar:

$$n^2 / \log n \notin O(n^{2-\varepsilon}), \text{ da } f(n)/n^2 = (\log n)^{-1} \notin O(n^{-\varepsilon}).$$

Fall 2 ist **nicht** anwendbar: $n^2 / \log n \notin \Theta(n^2)$.

Fall 3 ist **nicht** anwendbar:

$$f(n) \notin \Omega(n^{2+\varepsilon}), \text{ da } f(n)/n^2 = (\log n)^{-1} \notin O(n^{+\varepsilon}).$$

Das Mastertheorem ist nicht immer anwendbar

Beispiel

$$T(n) = 4 \cdot T(n/2) + \frac{n^2}{\log n}$$

- Also gilt: $b = 4$, $c = 2$ und $f(n) = n^2 / \log n$; $E = 2$.

Fall 1 ist **nicht** anwendbar:

$$n^2 / \log n \notin O(n^{2-\varepsilon}), \text{ da } f(n)/n^2 = (\log n)^{-1} \notin O(n^{-\varepsilon}).$$

Fall 2 ist **nicht** anwendbar: $n^2 / \log n \notin \Theta(n^2)$.

Fall 3 ist **nicht** anwendbar:

$$f(n) \notin \Omega(n^{2+\varepsilon}), \text{ da } f(n)/n^2 = (\log n)^{-1} \notin O(n^{+\varepsilon}).$$

⇒ Das Mastertheorem hilft hier überhaupt nicht weiter!

- Durch Substitution erhält man: $T(n) \in \Theta(n^2 \cdot \log \log n)$

Mastertheorem: Beweis