Datenstrukturen und Algorithmen

Vorlesung 6: Mastertheorem (K4)

Joost-Pieter Katoen

Lehrstuhl für Informatik 2
Software Modeling and Verification Group

http://www-i2.informatik.rwth-aachen.de/i2/dsal12/

24. April 2012

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Übersicht

Übersicht

Rekursionsgleichungen

Rekursionsgleichung

Für rekursive Algorithmen wird die Laufzeit meistens durch Rekursionsgleichungen beschrieben.

Eine Rekursionsgleichung ist eine Gleichung oder eine Ungleichung, die eine Funktion durch ihre eigenen Funktionswerte für kleinere Eingaben beschreibt.

Beispiele

- $T(n) = T(\lceil (n-1)/2 \rceil) + 1$ — Binäre Suche
- $T(n) = T(n-1) + n - 1$ — Bubblesort
- $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + n - 1$ — Mergesort
- $T(n) = 7 \cdot T(n/2) + c \cdot n^2$ — Strassen's Matrixmultiplikation

Die zentrale Frage ist: Wie löst man solche Rekursionsgleichungen?

Die Substitutionsmethode

Substitutionsmethode

Die Substitutionsmethode besteht aus zwei Schritten:

1. Rate die Form der Lösung, durch z.B.:
   - Scharfes Hinsehen, kurze Eingaben ausprobieren und einsetzen
   - Betrachtung des Rekursionsbaum
2. Vollständige Induktion um die Konstanten zu finden und zu zeigen, dass die Lösung funktioniert.

Die Substitutionsmethode: Beispiel

Beispiel

Betrachte folgende Rekursionsgleichung:

$$T(1) = 1$$
$$T(n) = 2 \cdot T(n/2) + n \quad \text{für } n > 1.$$

- Wir vermuten als Lösung $T(n) \in O(n \cdot \log n)$.
- Dazu müssen wir $T(n) \leqslant c{\cdot}n{\cdot}\log n$ zeigen, für geeignete $c > 0$.
- Bestimme ob für ein geeignetes n_0, für $n \geqslant n_0$, $T(n) \leqslant c{\cdot}n{\cdot}\log n$ gilt.
- Stelle fest, dass $T(1) = 1 \leqslant c{\cdot}1{\cdot}\log 1 = 0$ verletzt ist.
- Es gilt: $T(2) = 4 \leqslant c{\cdot}2\log 2$ und $T(3) = 5 \leqslant c{\cdot}3\log 3$ für $c > 1$
- Überprüfe dann durch Substitution und Induktion (s. nächste Folie)
- Damit gilt für jedes $c > 1$ und $n \geqslant n_0 > 1$, dass $T(n) \leqslant c{\cdot}n{\cdot}\log n$.

Die Substitutionsmethode: Beispiel

Beispiel

$T(n) = 2 \cdot T(n/2) + n$ für $n > 1$, und $T(1) = 1$

$$\begin{aligned}
T(n) &= 2 \cdot T(n/2) + n && \mid \text{Induktionshypothese} \\
&\leqslant 2\,(c{\cdot}n/2{\cdot}\log n/2) + n \\
&= c{\cdot}n{\cdot}\log n/2 + n && \mid \text{log-Rechnung: } (\log \equiv \log_2)\ \log n/2 = \log n - \log 2 \\
&= c{\cdot}n{\cdot}\log n - c{\cdot}n{\cdot}\log 2 + n \\
&\leqslant c{\cdot}n{\cdot}\log n - c{\cdot}n + n && \mid \text{mit } c > 1 \text{ folgt sofort:} \\
&\leqslant c{\cdot}n{\cdot}\log n
\end{aligned}$$

Raten der Lösung durch Iteration

Grundidee

Wiederholtes Einsetzen der Rekursionsgleichung in sich selbst, bis man ein Muster erkennt.

Beispiel

$$\begin{aligned}
T(n) &= 3 \cdot T(n/4) + n && \mid \text{Einsetzen} \\
&= 3 \cdot (3 \cdot T(n/16) + n/4)) + n && \mid \text{Nochmal einsetzen} \\
&= 9 \cdot (3 \cdot T(n/64) + n/16)) + 3 \cdot n/4 + n && \mid \text{Vereinfachen} \\
&= 27 \cdot T(n/64) + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot n + \left(\frac{3}{4}\right)^1 \cdot n + \left(\frac{3}{4}\right)^0 \cdot n
\end{aligned}$$

Wir nehmen $T(1) = c$ an und erhalten: $T(n) = \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} \left(\frac{3}{4}\right)^i \cdot n + c \cdot n^{\log_4 3}$

Diese Aussage kann mit Hilfe der Substitutionsmethode gezeigt werden.

Raten der Lösung durch Rekursionsbäume

Grundidee

Stelle das Ineinander-Einsetzen als Baum dar, indem man Buch über das aktuelle Rekursionsargument und die nichtrekursiven Kosten führt.

Rekursionsbaum

1. Jeder Knoten stellt die Kosten eines Teilproblems dar.
   - Die Wurzel stellt die zu analysierenden Kosten $T(n)$ dar.
   - Die Blätter stellen die Kosten der Basisfälle dar, z.B. $T(0)$ oder $T(1)$.
2. Wir summieren die Kosten innerhalb jeder Ebene des Baumes.
3. Die Gesamtkosten := summieren über die Kosten aller Ebenen.

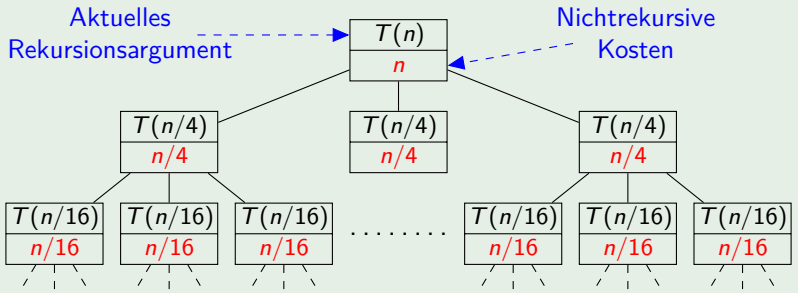
Wichtiger Hinweis

Ein Rekursionsbaum ist sehr nützlich, um eine Lösung zu raten, die dann mit Hilfe der Substitutionsmethode überprüft werden kann.
Der Baum selber reicht jedoch meistens nicht als Beweis.

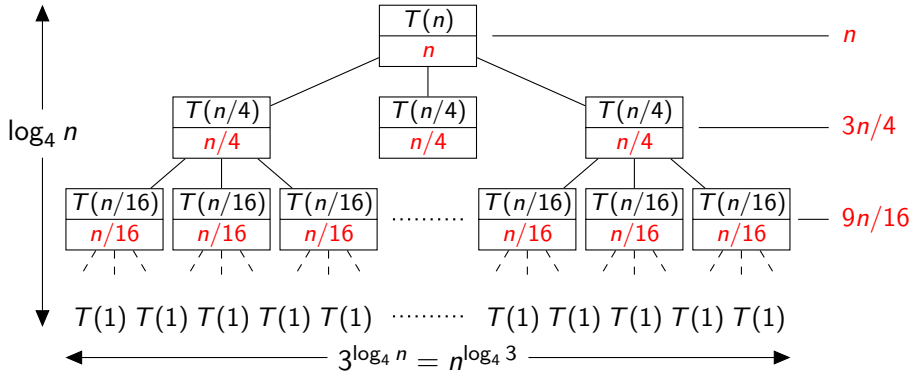
Rekursionsbaum: Beispiel

Beispiel

Der Rekursionsbaum von $T(n) = 3 \cdot T(n/4) + n$ sieht etwa so aus:



Rekursionsbaum: Beispiel



$$T(n) = \underbrace{\sum_{i=0}^{\log_4 n - 1}}_{\text{Summe über alle Ebenen}} \underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^i \cdot n}_{\text{Kosten pro Ebene}} + \underbrace{c \cdot n^{\log_4 3}}_{\substack{\text{Gesamtkosten} \\ \text{für die Blätter} \\ \text{mit } T(1) = c}}$$

Rekursionsbaum: Beispiel

Eine obere Schranke für die Komplexität erhält man nun folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
T(n) &= \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} \left(\frac{3}{4}\right)^i \cdot n + c \cdot n^{\log_4 3} && \text{| Vernachlässigen kleinerer Terme} \\
&< \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i \cdot n + c \cdot n^{\log_4 3} && \text{| Geometrische Reihe} \\
&< \frac{1}{1-(3/4)} \cdot n + c \cdot n^{\log_4 3} && \text{| Umformen} \\
&< 4 \cdot n + c \cdot n^{\log_4 3} && \text{| Asymptotische Ordnung bestimmen, setze ein, dass } \log_4 3 < 1
\end{aligned}$$

$T(n) \in O(n)$.

Korrektheit

Wir können die Substitutionsmethode benutzen, um die Vermutung zu bestätigen dass:

$T(n) \in O(n)$ eine obere Schranke von $T(n) = 3 \cdot T(n/4) + n$ ist.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 3 \cdot T(n/4) + n && \mid \text{Induktionshypothese} \\
&\leqslant 3d{\cdot}n/4 + n \\
&= \frac{3}{4} d{\cdot}n + n \\
&= \left(\frac{3}{4} d + 1\right) \cdot n && \mid \text{mit } d \geqslant 4 \text{ folgt sofort:} \\
&\leqslant d{\cdot}n
\end{aligned}
$$

Und wir stellen fest, dass es ein n_0 gibt, so dass $T(n_0) \leqslant d{\cdot}n_0$ ist.

Mastertheorem

Allgemeine Format der Rekursionsgleichung

Eine Rekursionsgleichung für die Komplexitätsanalyse sieht meistens folgendermaßen aus:

$$T(n) = b \cdot T\left(\frac{n}{c}\right) + f(n)$$

wobei $b > 0$, $c > 1$ gilt und $f(n)$ eine gegebene Funktion ist.

Intuition:

- Das zu analysierende Problem teilt sich jeweils in b Teilprobleme auf
- Jedes dieser Teilprobleme hat die Größe $\frac{n}{c}$
- Die Kosten für das Aufteilen eines Problems und Kombinieren der Teillösungen sind $f(n)$.

Das Mastertheorem

$$T(n) = b \cdot T\left(\frac{n}{c}\right) + f(n) \quad \text{mit } b \geqslant 1 \text{ und } c > 1.$$

- Anzahl der Blätter im Rekursionsbaum: n^E mit $E = \log b / \log c$.

Mastertheorem

	Wenn	Dann
1.	$f(n) \in O(n^{E-\varepsilon})$ für ein $\varepsilon > 0$	$T(n) \in \Theta(n^E)$
2.	$f(n) \in \Theta(n^E)$	$T(n) \in \Theta(n^E \cdot \log n)$
3.	$f(n) \in \Omega(n^{E+\varepsilon})$ für ein $\varepsilon > 0$ und $b{\cdot}f(n/c) \leqslant d{\cdot}f(n)$ für $d < 1$ und n hinreichend groß	$T(n) \in \Theta(f(n))$

- Bemerke, dass das Mastertheorem nicht alle Fälle abdeckt.

Das Mastertheorem verstehen

In jedem der 3 Fälle wird die Funktion $f(n)$ mit $n^E = n^{\log_c b}$ verglichen.

Mastertheorem: Intuition

	Wenn	Dann
1.	$f(n)$ polynomial kleiner ist als n^E	$T(n) \in \Theta(n^E)$
2.	$f(n)$ und n^E die gleiche Größe haben	$T(n) \in \Theta(n^E \cdot \log n)$
3.	$f(n)$ ist polynomial größer als n^E und erfüllt $b{\cdot}f(n/c) \leqslant d{\cdot}f(n)$	$T(n) \in \Theta(f(n))$

Nicht abgedeckte Fälle:

1. $f(n)$ ist kleiner als n^E, jedoch nicht polynomiell kleiner.
2. $f(n)$ ist größer als n^E, jedoch nicht polynomiell größer.
3. $f(n)$ ist polynomiell größer als n^E, erfüllt nicht $b{\cdot}f(n/c) \leqslant d{\cdot}f(n)$.

Anwendung des Mastertheorems

Beispiel

$T(n) = 4 \cdot T(n/2) + n$

- Somit: $b = 4$, $c = 2$ und $f(n) = n$; $E = \log 4 / \log 2 = 2$.
- Da $f(n) = n \in O(n^{2-\varepsilon})$, gilt Fall 1: $\boxed{T(n) \in \Theta(n^2)}$

Beispiel

$T(n) = 4 \cdot T(n/2) + n^2$

- Somit: $b = 4$, $c = 2$ und $f(n) = n^2$; $E = \log 4 / \log 2 = 2$.
- Da $f(n) = n^2 \notin O(n^{2-\varepsilon})$, gilt Fall 1 nicht.
- Aber weil $f(n) = n^2 \in \Theta(n^2)$, gilt Fall 2: $\boxed{T(n) \in \Theta(n^2 \cdot \log n)}$

Anwendung des Mastertheorems

Beispiel

$T(n) = 4 \cdot T(n/2) + n^3$

- Somit: $b = 4$, $c = 2$ und $f(n) = n^3$; $E = \log 4 / \log 2 = 2$.
- Wegen $E = 2$ gelten Fälle 1 und 2 offenbar nicht.
- Da $f(n) = n^3 \in \Omega(n^{2+\varepsilon})$ für $\varepsilon = 1$, könnte Fall 3 gelten.
- Überprüfe: gilt $f(n/2) \leqslant \frac{d}{4} \cdot f(n)$ für $d < 1$ und hinreichend grosse n?
- Dies liefert $\frac{1}{8} n^3 \leqslant \frac{d}{4} \cdot n^3$, und dies gilt für alle $\frac{1}{2} \leqslant d < 1$ (und n)
- Somit gilt Fall 3 tatsächlich und wir folgern: $\boxed{T(n) \in \Theta(n^3)}$

Das Mastertheorem ist nicht immer anwendbar

Beispiel

$T(n) = 4 \cdot T(n/2) + \frac{n^2}{\log n}$

- Also gilt: $b = 4$, $c = 2$ und $f(n) = n^2 / \log n$; $E = 2$.

Fall 1 ist nicht anwendbar:

$$n^2 / \log n \notin O(n^{2-\varepsilon}), \text{ da } f(n)/n^2 = (\log n)^{-1} \notin O(n^{-\varepsilon}).$$

Fall 2 ist nicht anwendbar: $n^2 / \log n \notin \Theta(n^2)$.

Fall 3 ist nicht anwendbar:

$$f(n) \notin \Omega(n^{2+\varepsilon}), \text{ da } f(n)/n^2 = (\log n)^{-1} \notin O(n^{+\varepsilon}).$$

$\Rightarrow$ Das Mastertheorem hilft hier überhaupt nicht weiter!

- Durch Substitution erhält man: $\boxed{T(n) \in \Theta(n^2 \cdot \log \log n)}$

Mastertheorem: Beweis