

Datenstrukturen und Algorithmen

Vorlesung 12: Hashing I

Joost-Pieter Katoen

Lehrstuhl für Informatik 2
Software Modeling and Verification Group

<http://www-i2.informatik.rwth-aachen.de/i2/dsal12/>

25. Mai 2012



Einführung (I)

Dictionary (Wörterbuch)

Das **Dictionary** (auch: Map, assoziatives Array) speichert Informationen, die jederzeit anhand ihres **Schlüssels** abgerufen werden können. Weiterhin:

- ▶ Die Daten sind dynamisch gespeichert.
- ▶ **Element** dictSearch(Dict d, **int** k) gibt die in d zum Schlüssel k gespeicherten Informationen zurück.
- ▶ **void** dictInsert(Dict d, **Element** e) speichert Element e unter seinem Schlüssel e.key in d.
- ▶ **void** dictDelete(Dict d, **Element** e) löscht das Element e aus d, wobei e in d enthalten sein muss.

Beispiel

Symboltabelle eines Compilers, wobei die Schlüssel Strings (etwa Bezeichner) sind.

Übersicht

- ① Direkte Adressierung
 - Counting Sort

- ② Grundlagen des Hashings

- ③ Verkettung

- ④ Hashfunktionen

Einführung (II)

Problem

Welche Datenstrukturen sind geeignet, um ein Dictionary zu implementieren?

- ▶ **Heap**: Einfügen und Löschen sind effizient. Aber was ist mit Suche?
- ▶ **Sortiertes Array/Liste**: Einfügen ist im Worst-Case linear.
- ▶ **Rot-Schwarz-Baum**: Alle Operationen sind im Worst-Case logarithmisch.

Lösung

Unter realistischen Annahmen benötigt eine **Hash-Tabelle** im Durchschnitt **O(1)** für alle Operationen.

Übersicht

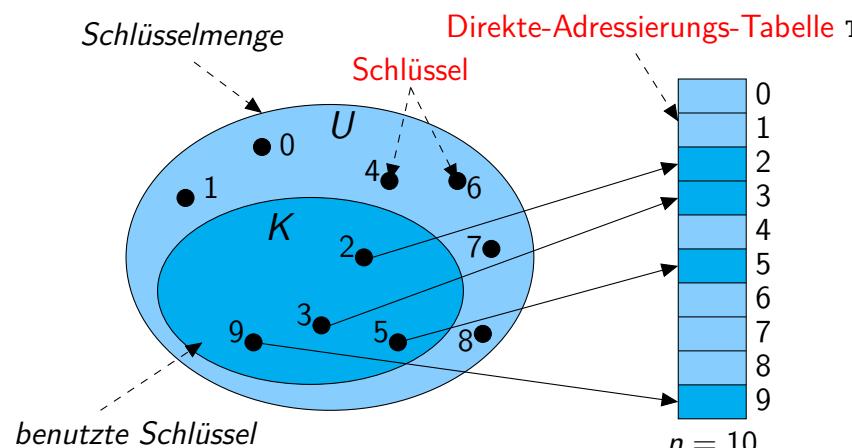
- ① Direkte Adressierung
 - Counting Sort

- ② Grundlagen des Hashings

- ③ Verkettung

- ④ Hashfunktionen

Direkte Adressierung (II)



Direkte Adressierung (I)

Direkte Adressierung

- ▶ Alloziere ein Array (die [Direkte-Adressierungs-Tabelle](#)), so dass es für jeden möglichen Schlüssel eine(1) Position gibt.
- ▶ Jedes Array-Element enthält einen Pointer auf die gespeicherte Information.
 - ▶ Der Einfachheit halber vernachlässigen wir in der Vorlesung die zu den Schlüsseln gehörenden Informationen.
- ▶ Mit Schlüsselmenge $U = \{0, 1, \dots, n - 1\}$ ergibt sich:
 - ▶ Eine Direkte-Adressierungs-Tabelle $T[0..n-1]$, wobei $T[k]$ zu Schlüssel k gehört.
 - ▶ `datSearch(T, int k): return T[k];`
 - ▶ `datInsert(T, Element e): T[e.key] = e;`
 - ▶ `datDelete(T, Element e): T[e.key] = null;`
- ▶ Die Laufzeit jeder Operation ist im [Worst-Case \$\Theta\(1\)\$](#) .

Duplikate in Linearzeit erkennen

Alle Elemente seien ganze Zahlen zwischen 0 und k , wobei $k \in \Theta(n)$.

```

1 bool checkDuplicates(int E[n], int n, int k) {
2   int histogram[k] = 0; // "Direkte-Adressierungs-Tabelle"
3   for (int i = 0; i < n; i++) {
4     if (histogram[E[i]] > 0) {
5       return true; // Duplikat gefunden
6     } else {
7       histogram[E[i]]++; // Zähle Häufigkeit
8     }
9   }
10  return false; // keine Duplikate
11 }
```

Counting Sort – Idee

1. Berechne Häufigkeit
2. Berechne „Position von x “ = „Anzahl der Elemente $\leq x$ “
3. Erzeuge Ausgabearray anhand dieser neuen Positionen

Counting Sort: Beispiel

Eingabe	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>6</td><td>8</td><td>0</td><td>3</td><td>5</td><td>4</td><td>4</td><td>0</td><td>4</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr></table>	6	8	0	3	5	4	4	0	4	0	1	2	3	4	5	6	7	8
6	8	0	3	5	4	4	0	4											
0	1	2	3	4	5	6	7	8											

Histogramm	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr></table>	2	0	0	1	2	1	1	0	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	0	0	1	2	1	1	0	1											
0	1	2	3	4	5	6	7	8											

Counting Sort

Alle Elemente seien ganze Zahlen zwischen 0 und k , wobei $k \in \Theta(n)$.

```

1 int[n] countSort(int E[n], int n, int k) {
2     int histogram[k] = 0; // "Direkte-Adressierungs-Tabelle"
3     for (int i = 0; i < n; i++) {
4         histogram[E[i]]++; // Zähle Häufigkeit
5     }
6     for (int i = 1; i < k; i++) { // Berechne Position
7         histogram[i] = histogram[i] + histogram[i - 1];
8     }
9     // Erzeuge Ausgabe
10    int result[n];
11    for (int i = n - 1; i >= 0; i--) { // stabil: rückwärts
12        histogram[E[i]]--;
13        result[histogram[E[i]]] = E[i];
14    }
15    return result;
16 }
```

► Worst-Case Zeitkomplexität: $\Theta(n)$

Counting Sort: Beispiel

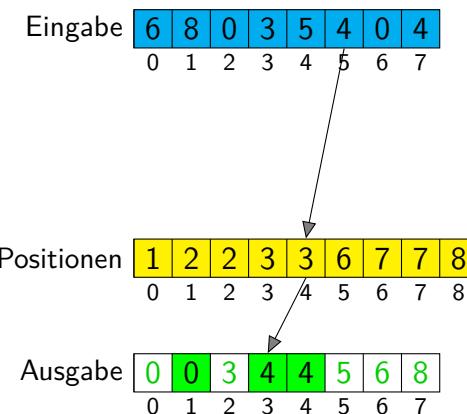
Eingabe	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>6</td><td>8</td><td>0</td><td>3</td><td>5</td><td>4</td><td>4</td><td>0</td><td>4</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr></table>	6	8	0	3	5	4	4	0	4	0	1	2	3	4	5	6	7	8
6	8	0	3	5	4	4	0	4											
0	1	2	3	4	5	6	7	8											

Histogramm	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr></table>	2	0	0	1	2	1	1	0	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	0	0	1	2	1	1	0	1											
0	1	2	3	4	5	6	7	8											

Positionen	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>7</td><td>8</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr></table>	2	2	2	3	5	6	7	7	8	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	2	3	5	6	7	7	8											
0	1	2	3	4	5	6	7	8											

Ausgabe	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>0</td><td>0</td><td>3</td><td>4</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>8</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr></table>	0	0	3	4	4	5	6	8	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	3	4	4	5	6	8										
0	1	2	3	4	5	6	7										

Counting Sort: Beispiel



Übersicht

1 Direkte Adressierung

- Counting Sort

2 Grundlagen des Hashings

3 Verkettung

4 Hashfunktionen

Counting Sort (II)

Problem

Wir sortieren also mit Worst-Case Komplexität $\Theta(n)$, obwohl wir als untere Schranke $\Theta(n \cdot \log n)$ bewiesen hatten?

Lösung

Dieser Algorithmus ist nicht mit Quicksort, Heapsort, usw. vergleichbar

- ▶ denn er basiert nicht auf Vergleich von Elementen, sondern auf Häufigkeiten.
- ▶ Das funktioniert, indem wir Direkte-Adressierung (Einfügen, Suchen, Löschen in $\Theta(1)$) ausnutzen.

Hauptproblem: Übermäßiger Speicherbedarf für das Array.

- ▶ Zum Beispiel bei Strings mit 20 Zeichen (5 bit/Zeichen) als Schlüssel benötigt man $2^{5 \cdot 20} = 2^{100}$ Arrayeinträge.
- ▶ Können wir diesen riesigen Speicherbedarf vermeiden und effizient bleiben? Ja! – mit Hashing.

Hashing (I)

Praktisch wird nur ein kleiner Teil der Schlüssel verwendet, d. h. $|K| \ll |U|$.

⇒ Bei Direkter-Adressierung ist der größte Teil von T verschwendet.

Das Ziel von Hashing ist:

- ▶ Einen extrem großen Schlüsselraum auf einen vernünftig kleinen Bereich von ganzen Zahlen abzubilden.
- ▶ Dass zwei Schlüssel auf die selbe Zahl abgebildet werden, soll möglichst unwahrscheinlich sein.

Hashfunktion, Hashtabelle, Hashkollision

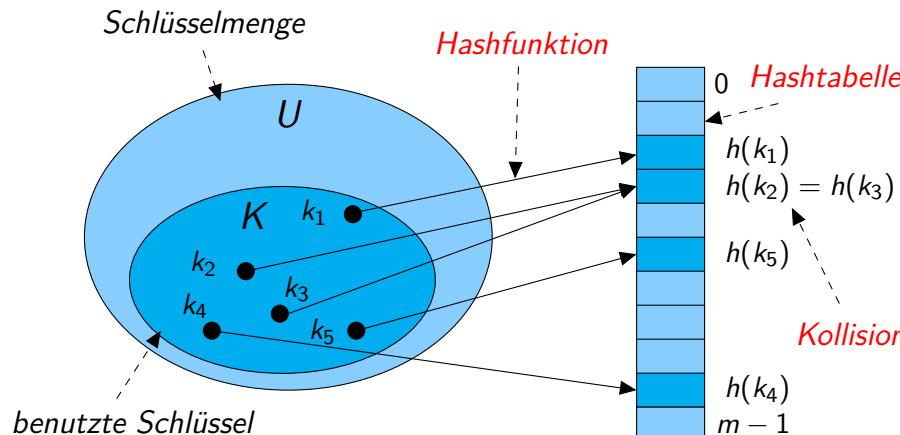
Eine Hashfunktion bildet einen Schlüssel auf einen Index der Hashtabelle T ab:

$$h : U \longrightarrow \{0, 1, \dots, m-1\} \text{ für Tabellengröße } m \text{ und } |U| = n.$$

Wir sagen, dass $h(k)$ der Hashwert des Schlüssels k ist.

Das Auftreten von $h(k) = h(k')$ für $k \neq k'$ nennt man eine Kollision.

Hashing (II)



- ▶ Wie finden wir Hashfunktionen, die einfach auszurechnen sind und Kollisionen minimieren?
- ▶ Wie behandeln wir dennoch auftretende Kollisionen?

Kollisionen: Das Geburtstagsparadoxon (II)

Auf Hashing angewendet bedeutet das:

- ▶ Die Wahrscheinlichkeit **keiner** Kollision nach k Einfügevorgängen in einer m -elementigen Tabelle ist:

$$\frac{m}{m} \cdot \frac{m-1}{m} \cdot \dots \cdot \frac{m-k+1}{m} = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{m-i}{m}$$

- ▶ Dieses Produkt geht gegen 0.
- ▶ Etwa bei $m = 365$ ist die Wahrscheinlichkeit für $k \geq 50$ praktisch 0.

Kollisionen: Das Geburtstagsparadoxon (I)

Unsere Hashfunktion mag noch so gut sein,
wir sollten auf Kollisionen vorbereitet sein!

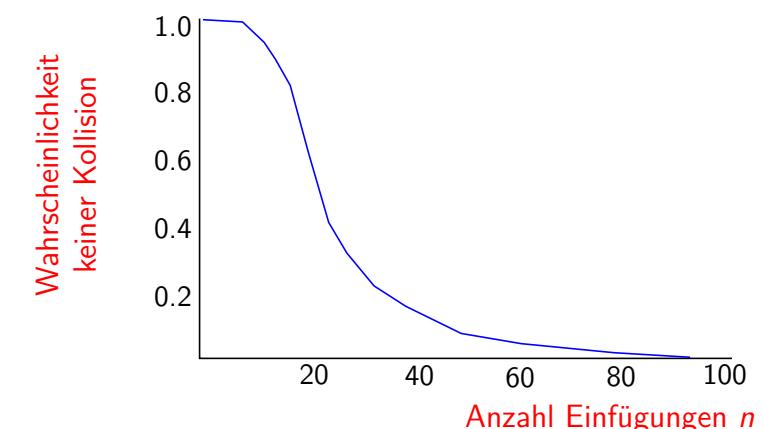
Das liegt am

Geburtstagsparadoxon

- ▶ Die Wahrscheinlichkeit, dass dein Nachbar am selben Tag wie du Geburtstag hat ist $\frac{1}{365} \approx 0,027$.
- ▶ Fragt man 23 Personen, wächst die Wahrscheinlichkeit auf $\frac{23}{365} \approx 0,063$.
- ▶ Sind aber 23 Personen in einem Raum, dann haben zwei von ihnen den selben Geburtstag mit Wahrscheinlichkeit

$$1 - \left(\frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \dots \cdot \frac{343}{365} \right) \approx 0,5$$

Kollisionen: Das Geburtstagsparadoxon (III)



Übersicht

1 Direkte Adressierung
• Counting Sort

2 Grundlagen des Hashings

3 Verkettung

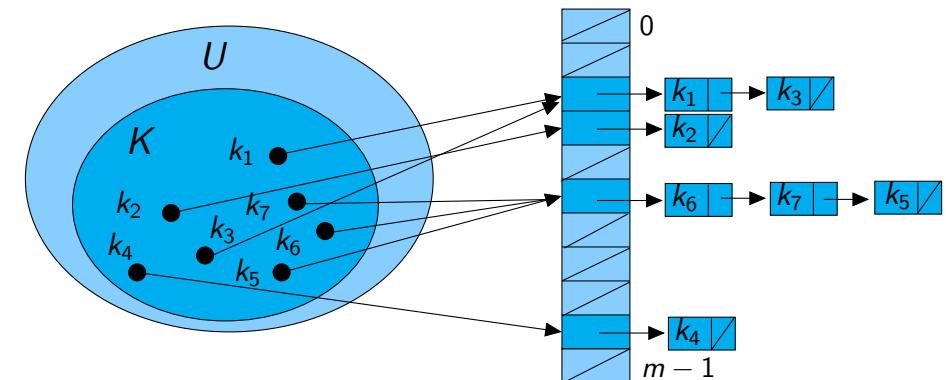
4 Hashfunktionen

Kollisionsauflösung durch Verkettung (I)

Idee

Alle Schlüssel, die zum gleichen Hash führen, werden in einer **verketteten Liste** gespeichert.

[Luhn 1953]



Kollisionsauflösung durch Verkettung (II)

Dictionary-Operationen bei Verkettung (informell)

- ▶ `hcSearch(int k)`: Suche nach einem Element mit Schlüssel k in der Liste $T[h(k)]$.
- ▶ `hcInsert(Element e)`: Setze Element e an den Anfang der Liste $T[h(e.key)]$.
- ▶ `hcDelete(Element e)`: Lösche Element e aus der Liste $T[h(e.key)]$.

Kollisionsauflösung durch Verkettung (III)

Worst-Case Komplexität

Angenommen, die Berechnung von $h(k)$ ist recht effizient, etwa $\Theta(1)$. Die Komplexität ist:

- Suche:** Proportional zur Länge der Liste $T[h(k)]$.
- Einfügen:** Konstant (ohne Überprüfung, ob das Element schon vorhanden ist).
- Löschen:** Proportional zur Länge der Liste $T[h(k)]$.
- ▶ Im Worst-Case haben alle Schüssel den selben Hashwert.
- ▶ Suche und Löschen hat dann die selbe Worst-Case Komplexität wie Listen: $\Theta(n)$.
- ▶ Im Average-Case ist Hashing mit Verkettung aber dennoch effizient!

Average-Case-Analyse von Verkettung (I)

Annahmen:

- ▶ Es gebe n mögliche Schlüssel und m Hashtabellenpositionen, $n \gg m$.
- ▶ **Gleichverteiltes Hashing:** Jeder Schlüssel wird mit gleicher Wahrscheinlichkeit und unabhängig von den anderen Schlüssel auf jedes der m Slots abgebildet.
- ▶ Der Hashwert $h(k)$ kann in konstanter Zeit berechnet werden.

O, Θ, Ω erweitert

Aus technischen Gründen erweitern wir die Definition von O, Θ und Ω auf Funktionen mit zwei Parametern.

- ▶ Beispielsweise ist $g \in O(f)$ gdw.
- $$\exists c > 0, n_0, m_0 \text{ mit } \forall n \geq n_0, m \geq m_0 : 0 \leq g(n, m) \leq c \cdot f(n, m)$$

Average-Case-Analyse von Verkettung (III)

Erfolglose Suche

Die erfolglose Suche benötigt $\Theta(1 + \alpha)$ Zeit im Average-Case.

- ▶ Die erwartete Zeit, um Schlüssel k zu finden ist gerade die Zeit, um die Liste $T[h(k)]$ zu durchsuchen.
- ▶ Die erwartete Länge dieser Liste ist α .
- ▶ Das Berechnen von $h(k)$ benötige nur eine Zeiteinheit.
- ⇒ Insgesamt erhält man $1 + \alpha$ Zeiteinheiten im Durchschnitt.

Average-Case-Analyse von Verkettung (II)

- ▶ Der **Füllgrad** der Hashtabelle T ist $\alpha(n, m) = \frac{n}{m}$.
- ⇒ Auch die durchschnittliche Länge der Liste $T[h(k)]$ ist α !
- ▶ Wieviele Elemente aus $T[h(k)]$ müssen nun im Schnitt untersucht werden, um den Schlüssel k zu finden?
- ⇒ Unterscheide **erfolgreiche** von **erfolgloser** Suche (wie in Vorlesung 1).

Average-Case-Analyse von Verkettung (IV)

Erfolgreiche Suche

Die erfolgreiche Suche benötigt im Average-Case auch $\Theta(1 + \alpha)$.

- ▶ Sei k_i der i -te eingefügte Schlüssel und $A(k_i)$ die erwartete Zeit, um k_i zu finden:

$$A(k_i) = 1 + \text{Durchschnittliche Anzahl Schlüssel, die in } T[h(k_{-i})] \text{ erst nach } k_i \text{ eingefügt wurden}$$

- ▶ Annahme von gleichverteiltem Hashing ergibt: $A(k_i) = 1 + \sum_{j=i+1}^n \frac{1}{m}$
- ▶ Durchschnitt über alle n Einfügungen in die Hashtabelle: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A(k_i)$

Average-Case-Analyse von Verkettung (IV)

Die erwartete Anzahl an untersuchten Elementen bei einer erfolgreichen Suche ist:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 + \sum_{j=i+1}^n \frac{1}{m} \right) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1 + \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n 1 \\
 &= 1 + \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n (n-i) \\
 &= 1 + \frac{1}{nm} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \\
 &= 1 + \frac{n-1}{2m} = 1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2n}
 \end{aligned}$$

| Summe aufteilen
| Vereinfachen
| Summe $1 \dots n-1$
| Vereinfachen
und damit in $\Theta(1 + \alpha)$

Übersicht

- 1 Direkte Adressierung
 - Counting Sort

- 2 Grundlagen des Hashings

- 3 Verkettung

- 4 Hashfunktionen

Komplexität der Dictionary-Operationen mit Verkettung

- ▶ Vorausgesetzt die Anzahl der Einträge m ist (wenigstens) proportional zu n ,
- ▶ dann ist der Füllgrad $\alpha(n, m) = \frac{n}{m} \in \frac{O(m)}{m} = O(1)$.
- ▶ Damit benötigen alle Operationen im Durchschnitt $O(1)$.
- ▶ Weil das auch *Suche* mit einschließt, können wir im Average-Case mit $O(n)$ sortieren.

Hashfunktionen

Hashfunktion

- ▶ Eine **Hashfunktion** bildet einen Schlüssel auf eine ganze Zahl (d. h. einen Index) ab.
- ▶ Was macht eine „gute“ Hashfunktion aus?
 - ▶ Die Hashfunktion $h(k)$ sollte **einfach zu berechnen** sein,
 - ▶ sie sollte **surjektiv** auf der Menge $0 \dots m-1$ sein,
 - ▶ sie sollte alle Indizes mit möglichst **gleicher Häufigkeit** verwenden, und
 - ▶ **ähnliche Schlüssel** möglichst breit auf die Hashtabelle **verteilen**.
- ▶ Drei oft verwendete Techniken, eine „gute“ Hashfunktion zu erhalten:
 - ▶ Die **Divisionsmethode**,
 - ▶ die **Multiplikationsmethode**, und
 - ▶ **universelles Hashing**.

Divisionsmethode

Divisionsmethode

Hashfunktion: $h(k) = k \bmod m$

- ▶ Bei dieser Methode muss der Wert von m sorgfältig gewählt werden.
 - ▶ Für $m = 2^p$ ist $h(k)$ einfach die letzte p Bits.
 - ▶ Besser ist es, $h(k)$ abhängig von mehreren Bits zu machen.
- ▶ Gute Wahl ist m prim und nicht zu nah an einer Zweierpotenz.

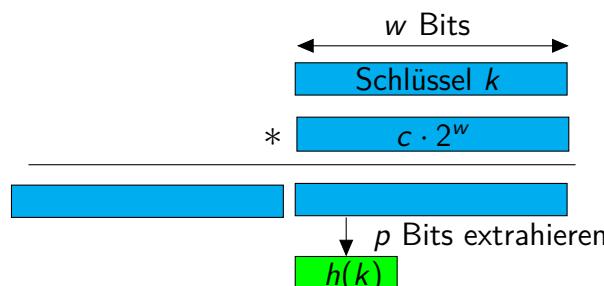
Beispiel

- ▶ Strings mit 2000 Zeichen als Schlüssel.
- ▶ Wir erlauben durchschnittlich 3 Sondierungen für die erfolglose Suche.
- ⇒ Wähle $m \approx 2000/3 \rightarrow 701$.

Multiplikationsmethode (II)

Hashfunktion: $h(k) = \lfloor m \cdot (k \cdot c \bmod 1) \rfloor$.

- ▶ Das übliche Vorgehen nimmt $m = 2^p$ und $c = \frac{s}{2^w}$, wobei $0 < s < 2^w$. Dann:
 - ▶ Berechne zunächst $k \cdot s (= k \cdot c \cdot 2^w)$.
 - ▶ Teile durch 2^w , verwende nur die Nachkommastellen.
 - ▶ Multipliziere mit 2^p und verwende nur den ganzzahligen Anteil.



Multiplikationsmethode (I)

Multiplikationsmethode

Hashfunktion: $h(k) = \lfloor m \cdot (k \cdot c \bmod 1) \rfloor$ für $0 < c < 1$

- ▶ $k \cdot c \bmod 1$ ist der Nachkommanteil von $k \cdot c$, d. h. $k \cdot c - \lfloor k \cdot c \rfloor$.
- ▶ Knuth empfiehlt $c \approx (\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0,62$.
- ⇒ Der Wert von m ist hier nicht kritisch.

Universelles Hashing (I)

Das größte Problem beim Hashing ist,

- ▶ dass es immer eine ungünstige Sequenz von Schlüsseln gibt, die auf den selben Slot abgebildet werden.

Idee

Wähle **zufällig** eine Hashfunktion aus einer gegebenen kleinen Menge H , unabhängig von den verwendeten Schlüsseln.

Eine Menge Hashfunktionen ist **universell**, wenn

- ▶ der Anteil der Funktionen aus H , so dass k und k' kollidieren ist $\frac{|H|}{m}$.
- ▶ d. h., die Wahrscheinlichkeit einer Kollision von k und k' ist $\frac{1}{|H|} \cdot \frac{|H|}{m} = \frac{1}{m}$.

Für universelles Hashing ist die erwartete Länge der Liste $T[k]$

1. Gleich α , wenn k nicht in T enthalten ist.
2. Gleich $1+\alpha$, wenn k in T enthalten ist.

Universelles Hashing (II)

Beispiel

Definiere die Elemente der Klasse H von Hashfunktionen durch:

$$h_{a,b}(k) = ((a \cdot k + b) \bmod p) \bmod m$$

- ▶ p sei Primzahl mit $p > m$ und $p >$ größter Schlüssel.
- ▶ Die ganzen Zahlen a ($1 \leq a < p$) und b ($0 \leq b < p$) werden erst bei der Ausführung gewählt.

Die Klasse der obigen Hashfunktionen $h_{a,b}$ ist universell.