Datenstrukturen und Algorithmen

Vorlesung 14: Elementare Graphenalgorithmen I

Joost-Pieter Katoen

Lehrstuhl für Informatik 2
Software Modeling and Verification Group

http://www-i2.informatik.rwth-aachen.de/i2/dsal12/

8. Juni 2012

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Übersicht

Übersicht

Die Bedeutung von Graphen

Graphen werden in vielen (Informatik-)Anwendungen verwendet:

Beispiele

- (Computer-)Netzwerke

Die Bedeutung von Graphen

Graphen werden in vielen (Informatik-)Anwendungen verwendet:

Beispiele

- (Computer-)Netzwerke
- Darstellung von topologischen Informationen (Karten, . . .)

Die Bedeutung von Graphen

Graphen werden in vielen (Informatik-)Anwendungen verwendet:

Beispiele

- (Computer-)Netzwerke
- Darstellung von topologischen Informationen (Karten, . . .)
- Darstellung von elektronischen Schaltungen

Die Bedeutung von Graphen

Graphen werden in vielen (Informatik-)Anwendungen verwendet:

Beispiele

- (Computer-)Netzwerke
- Darstellung von topologischen Informationen (Karten, ...)
- Darstellung von elektronischen Schaltungen
- Vorranggraphen (precedence graph), Ablaufpläne, ...

Die Bedeutung von Graphen

Graphen werden in vielen (Informatik-)Anwendungen verwendet:

Beispiele

- (Computer-)Netzwerke
- Darstellung von topologischen Informationen (Karten, ...)
- Darstellung von elektronischen Schaltungen
- Vorranggraphen (precedence graph), Ablaufpläne, ...
- Semantische Netze (z. B. Entity-Relationship-Diagramme)

Die Bedeutung von Graphen

Graphen werden in vielen (Informatik-)Anwendungen verwendet:

Beispiele

- (Computer-)Netzwerke
- Darstellung von topologischen Informationen (Karten, ...)
- Darstellung von elektronischen Schaltungen
- Vorranggraphen (precedence graph), Ablaufpläne, ...
- Semantische Netze (z. B. Entity-Relationship-Diagramme)

Wir werden uns auf fundamentale Graphalgorithmen konzentrieren.

Was ist ein gerichteter Graph? (I)

Gerichteter Graph

Ein gerichteter Graph (auch: Digraph) G ist ein Paar (V, E)

Was ist ein gerichteter Graph? (I)

Gerichteter Graph

Ein gerichteter Graph (auch: Digraph) G ist ein Paar (V, E) mit

- einer Menge Knoten (vertices) V und

Was ist ein gerichteter Graph? (I)

Gerichteter Graph

Ein gerichteter Graph (auch: Digraph) G ist ein Paar (V, E) mit

- einer Menge Knoten (vertices) V und
- einer Menge *(geordneter)* Paare von Knoten $E \subseteq V \times V$, die (gerichtete) Kanten (edges) genannt werden.

Was ist ein gerichteter Graph? (I)

Gerichteter Graph

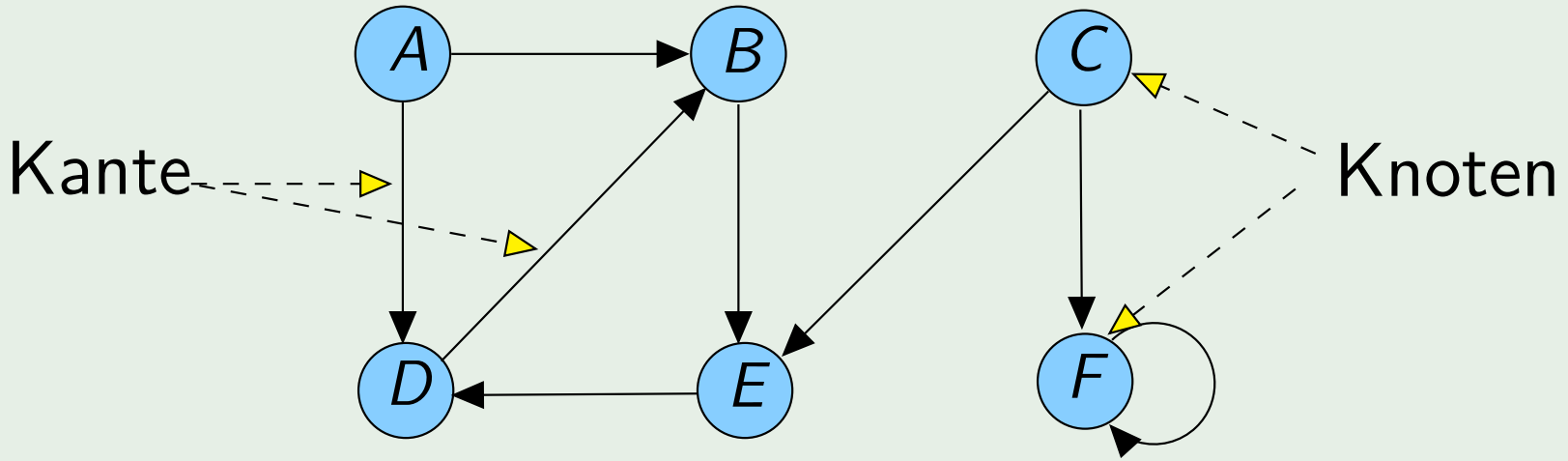
Ein gerichteter Graph (auch: Digraph) G ist ein Paar (V, E) mit

- einer Menge Knoten (vertices) V und
- einer Menge *(geordneter)* Paare von Knoten $E \subseteq V \times V$, die (gerichtete) Kanten (edges) genannt werden.
- Falls E eine Menge ungeordneter Paare ist, heißt G ungerichtet.

Was ist ein gerichteter Graph? (I)

Beispiel

- $V = \{ A, \ldots, F \}$
- $E = \{ (A, B), (A, D), (B, E), (C, E), (C, F), (D, B), (E, D), (F, F) \}$



Terminologie bei Graphen (I)

Teilgraph

Ein Teilgraph (subgraph) eines Graphen $G = (V, E)$ ist ein Graph $G' = (V', E')$ mit:

Terminologie bei Graphen (I)

Teilgraph

Ein Teilgraph (subgraph) eines Graphen $G = (V, E)$ ist ein Graph $G' = (V', E')$ mit:

- $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$.

Terminologie bei Graphen (I)

Teilgraph

Ein Teilgraph (subgraph) eines Graphen $G = (V, E)$ ist ein Graph $G' = (V', E')$ mit:

- $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$.
- Außerdem ist $E' \subseteq V' \times V'$ wegen der Grapheigenschaft von G'.

Terminologie bei Graphen (I)

Teilgraph

Ein Teilgraph (subgraph) eines Graphen $G = (V, E)$ ist ein Graph $G' = (V', E')$ mit:

- $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$.
- Außerdem ist $E' \subseteq V' \times V'$ wegen der Grapheigenschaft von G'.
- Ist $V' \subset V$ und $E' \subset E$, so heißt G' echter (proper) Teilgraph.

Terminologie bei Graphen (I)

Teilgraph

Ein Teilgraph (subgraph) eines Graphen $G = (V, E)$ ist ein Graph $G' = (V', E')$ mit:

- $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$.
- Außerdem ist $E' \subseteq V' \times V'$ wegen der Grapheigenschaft von G'.
- Ist $V' \subset V$ und $E' \subset E$, so heißt G' echter (proper) Teilgraph.

Symmetrischer Graph

Der Graph G heißt symmetrisch, wenn aus $(v, w) \in E$ folgt $(w, v) \in E$.

Terminologie bei Graphen (I)

Teilgraph

Ein Teilgraph (subgraph) eines Graphen $G = (V, E)$ ist ein Graph $G' = (V', E')$ mit:

- $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$.
- Außerdem ist $E' \subseteq V' \times V'$ wegen der Grapheigenschaft von G'.
- Ist $V' \subset V$ und $E' \subset E$, so heißt G' echter (proper) Teilgraph.

Symmetrischer Graph

Der Graph G heißt symmetrisch, wenn aus $(v, w) \in E$ folgt $(w, v) \in E$.

- Zu jedem ungerichteten Graphen gibt es korrespondierenden symmetrischen Digraphen.

Terminologie bei Graphen (II)

Vollständiger Graph

Der Graph G ist vollständig, wenn *jedes* Paar von Knoten mit einer Kante verbunden ist.

Terminologie bei Graphen (II)

Vollständiger Graph

Der Graph G ist vollständig, wenn *jedes* Paar von Knoten mit einer Kante verbunden ist.

Adjazent

Knoten w ist adjazent zu v, wenn $(v, w) \in E$.

Terminologie bei Graphen (II)

Vollständiger Graph

Der Graph G ist vollständig, wenn *jedes* Paar von Knoten mit einer Kante verbunden ist.

Adjazent

Knoten w ist adjazent zu v, wenn $(v, w) \in E$.

Transponieren

Transponiert man G (transpose graph), so erhält man $G^T = (V, E')$ mit $(v, w) \in E'$ gdw. $(w, v) \in E$.

Terminologie bei Graphen (II)

Vollständiger Graph

Der Graph G ist vollständig, wenn *jedes* Paar von Knoten mit einer Kante verbunden ist.

Adjazent

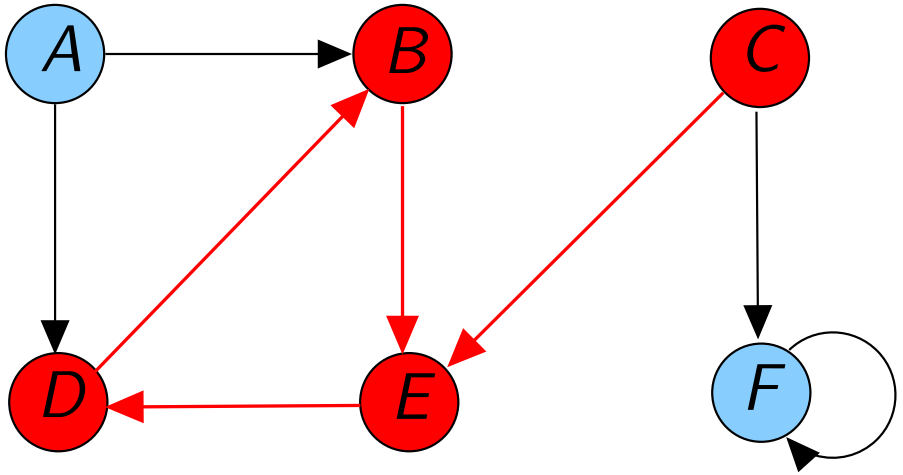
Knoten w ist adjazent zu v, wenn $(v, w) \in E$.

Transponieren

Transponiert man G (transpose graph), so erhält man $G^T = (V, E')$ mit $(v, w) \in E'$ gdw. $(w, v) \in E$.

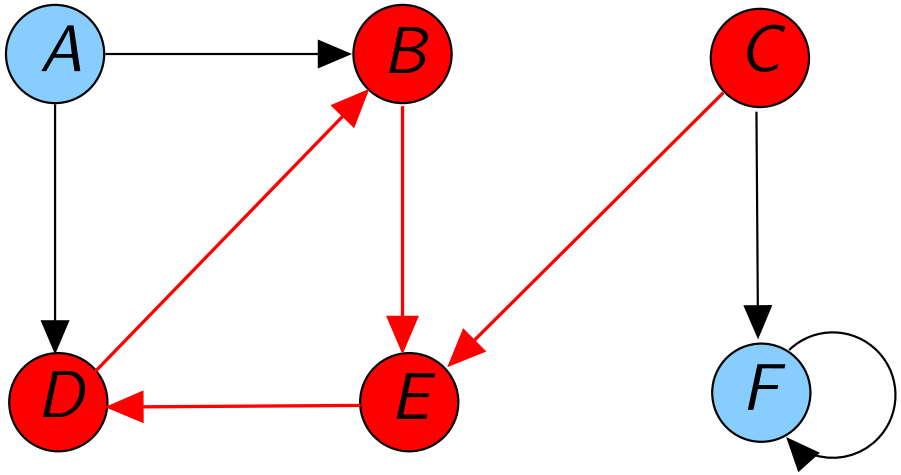
- In G^T ist die Richtung der Kanten von G gerade umgedreht.

Terminologie bei Graphen (III)

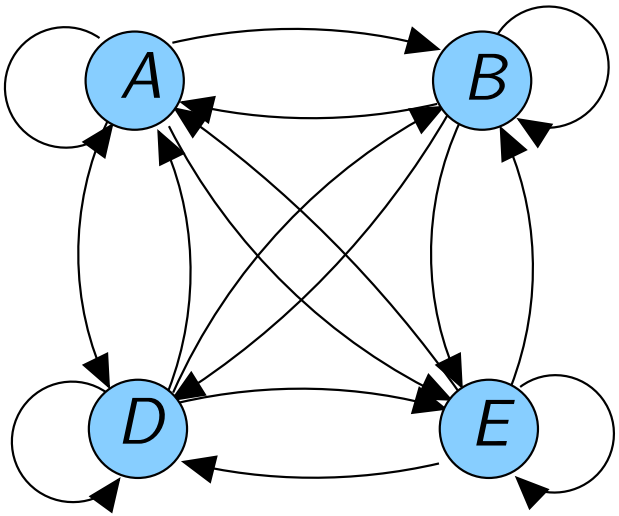


Teilgraph

Terminologie bei Graphen (III)



Teilgraph



Vollständiger (und symmetrischer) Digraph auf vier Knoten

Pfade und Zyklen (I)

Weg, Pfad

Ein Weg von Knoten v nach w ist eine Folge von Kanten (v_i, v_{i+1}):

$$v_0\ v_1\ v_2 \ldots v_{k-1}\ v_k, \text{ so dass } v_0 = v \text{ und } v_k = w$$

Pfade und Zyklen (I)

Weg, Pfad

Ein Weg von Knoten v nach w ist eine Folge von Kanten (v_i, v_{i+1}):

$$v_0\, v_1\, v_2 \ldots v_{k-1}\, v_k, \text{ so dass } v_0 = v \text{ und } v_k = w$$

Ein Weg, bei dem alle $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$ verschieden sind, heißt Pfad.

Pfade und Zyklen (I)

Weg, Pfad

Ein Weg von Knoten v nach w ist eine Folge von Kanten (v_i, v_{i+1}):

$$v_0\, v_1\, v_2 \ldots v_{k-1}\, v_k, \text{ so dass } v_0 = v \text{ und } v_k = w$$

Ein Weg, bei dem alle $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$ verschieden sind, heißt Pfad.

- Länge eines Pfades(Weges) ist die Anzahl der durchlaufenen Kanten.

Pfade und Zyklen (I)

Weg, Pfad

Ein Weg von Knoten v nach w ist eine Folge von Kanten (v_i, v_{i+1}):

$$v_0\, v_1\, v_2 \ldots v_{k-1}\, v_k, \text{ so dass } v_0 = v \text{ und } v_k = w$$

Ein Weg, bei dem alle $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$ verschieden sind, heißt Pfad.

- Länge eines Pfades(Weges) ist die Anzahl der durchlaufenen Kanten.

Erreichbarkeit

Knoten w heißt erreichbar von v, wenn es einen Pfad von v nach w gibt.

Pfade und Zyklen (I)

Weg, Pfad

Ein Weg von Knoten v nach w ist eine Folge von Kanten (v_i, v_{i+1}):

$$v_0\, v_1\, v_2 \ldots v_{k-1}\, v_k, \text{ so dass } v_0 = v \text{ und } v_k = w$$

Ein Weg, bei dem alle $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$ verschieden sind, heißt Pfad.

- Länge eines Pfades(Weges) ist die Anzahl der durchlaufenen Kanten.

Erreichbarkeit

Knoten w heißt erreichbar von v, wenn es einen Pfad von v nach w gibt.

Zyklus

Ein Zyklus ist ein nicht-leerer Weg bei dem der Startknoten auch Endknoten ist.

Pfade und Zyklen (I)

Weg, Pfad

Ein Weg von Knoten v nach w ist eine Folge von Kanten (v_i, v_{i+1}):

$$v_0\, v_1\, v_2 \ldots v_{k-1}\, v_k, \text{ so dass } v_0 = v \text{ und } v_k = w$$

Ein Weg, bei dem alle $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$ verschieden sind, heißt Pfad.

- Länge eines Pfades(Weges) ist die Anzahl der durchlaufenen Kanten.

Erreichbarkeit

Knoten w heißt erreichbar von v, wenn es einen Pfad von v nach w gibt.

Zyklus

Ein Zyklus ist ein nicht-leerer Weg bei dem der Startknoten auch Endknoten ist.

- Ein Zyklus der Form vv heißt Schleife (loop, self-cycle).

Pfade und Zyklen (I)

Weg, Pfad

Ein Weg von Knoten v nach w ist eine Folge von Kanten (v_i, v_{i+1}):

$$v_0\, v_1\, v_2 \ldots v_{k-1}\, v_k, \text{ so dass } v_0 = v \text{ und } v_k = w$$

Ein Weg, bei dem alle $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$ verschieden sind, heißt Pfad.

- Länge eines Pfades(Weges) ist die Anzahl der durchlaufenen Kanten.

Erreichbarkeit

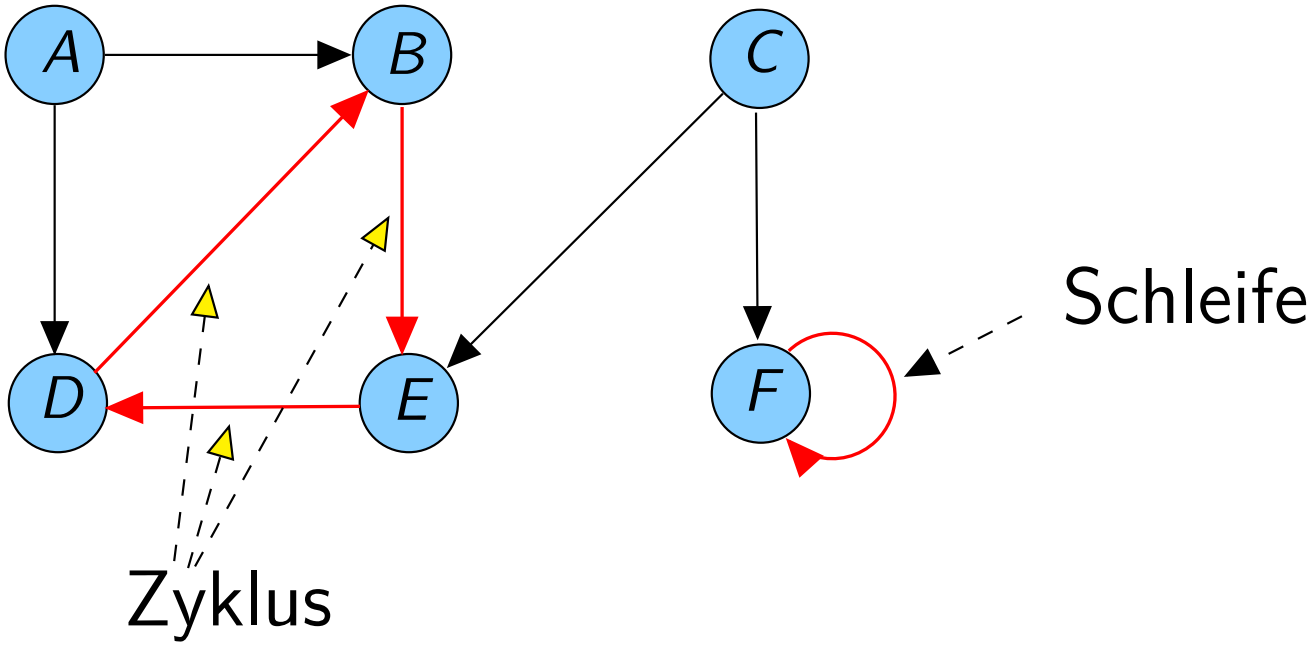
Knoten w heißt erreichbar von v, wenn es einen Pfad von v nach w gibt.

Zyklus

Ein Zyklus ist ein nicht-leerer Weg bei dem der Startknoten auch Endknoten ist.

- Ein Zyklus der Form vv heißt Schleife (loop, self-cycle).
- Ein Graph ist azyklisch, wenn er keine Zyklen hat.

Pfade und Zyklen (II)



$A\,B\,E\,D\,B$ und $C\,F\,F$ wären hier Beispiele für Wege.

$E\,D\,B$ und $C\,F$ sind Pfade.

Zusammenhängende Graphen (I)

Beim ungerichteten Graphen G:

Zusammenhang

- G heißt zusammenhängend, wenn jeder Knoten von jedem anderen Knoten aus erreichbar ist.

Zusammenhängende Graphen (I)

Beim ungerichteten Graphen G:

Zusammenhang

- G heißt zusammenhängend, wenn jeder Knoten von jedem anderen Knoten aus erreichbar ist.
- Eine Zusammenhangskomponente (connected component) von G ist ein maximaler zusammenhängender Teilgraph von G.

Zusammenhängende Graphen (I)

Beim ungerichteten Graphen G:

Zusammenhang

- G heißt zusammenhängend, wenn jeder Knoten von jedem anderen Knoten aus erreichbar ist.
- Eine Zusammenhangskomponente (connected component) von G ist ein maximaler zusammenhängender Teilgraph von G.
- In einer Ansammlung von Graphen heißt ein Graph maximal, wenn er von keinem anderen dieser Graphen ein echter Teilgraph ist.

Zusammenhängende Graphen (II)

Beim gerichteten Graphen G:

Zusammenhang

- G heißt stark zusammenhängend (strongly connected), wenn jeder Knoten von jedem anderen aus erreichbar ist.

Zusammenhängende Graphen (II)

Beim gerichteten Graphen G:

Zusammenhang

- G heißt stark zusammenhängend (strongly connected), wenn jeder Knoten von jedem anderen aus erreichbar ist.
- G heißt schwach zusammenhängend, wenn der zugehörige ungerichtete Graph (wenn man alle Kanten ungerichtet macht) zusammenhängend ist.

Zusammenhängende Graphen (II)

Beim gerichteten Graphen G:

Zusammenhang

- G heißt stark zusammenhängend (strongly connected), wenn jeder Knoten von jedem anderen aus erreichbar ist.
- G heißt schwach zusammenhängend, wenn der zugehörige ungerichtete Graph (wenn man alle Kanten ungerichtet macht) zusammenhängend ist.
- Eine starke Zusammenhangskomponente von G ist ein maximaler stark zusammenhängender Teilgraph von G.

Zusammenhängende Graphen (II)

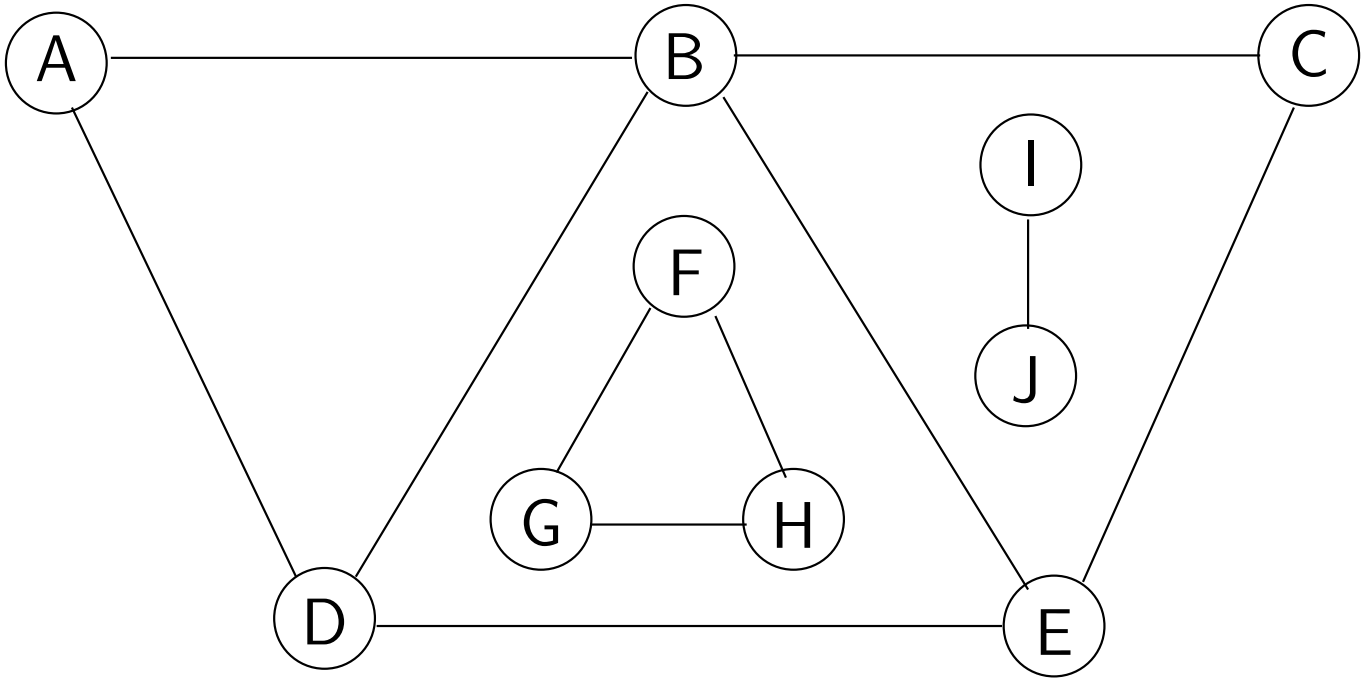
Beim gerichteten Graphen G:

Zusammenhang

- G heißt stark zusammenhängend (strongly connected), wenn jeder Knoten von jedem anderen aus erreichbar ist.
- G heißt schwach zusammenhängend, wenn der zugehörige ungerichtete Graph (wenn man alle Kanten ungerichtet macht) zusammenhängend ist.
- Eine starke Zusammenhangskomponente von G ist ein maximaler stark zusammenhängender Teilgraph von G.

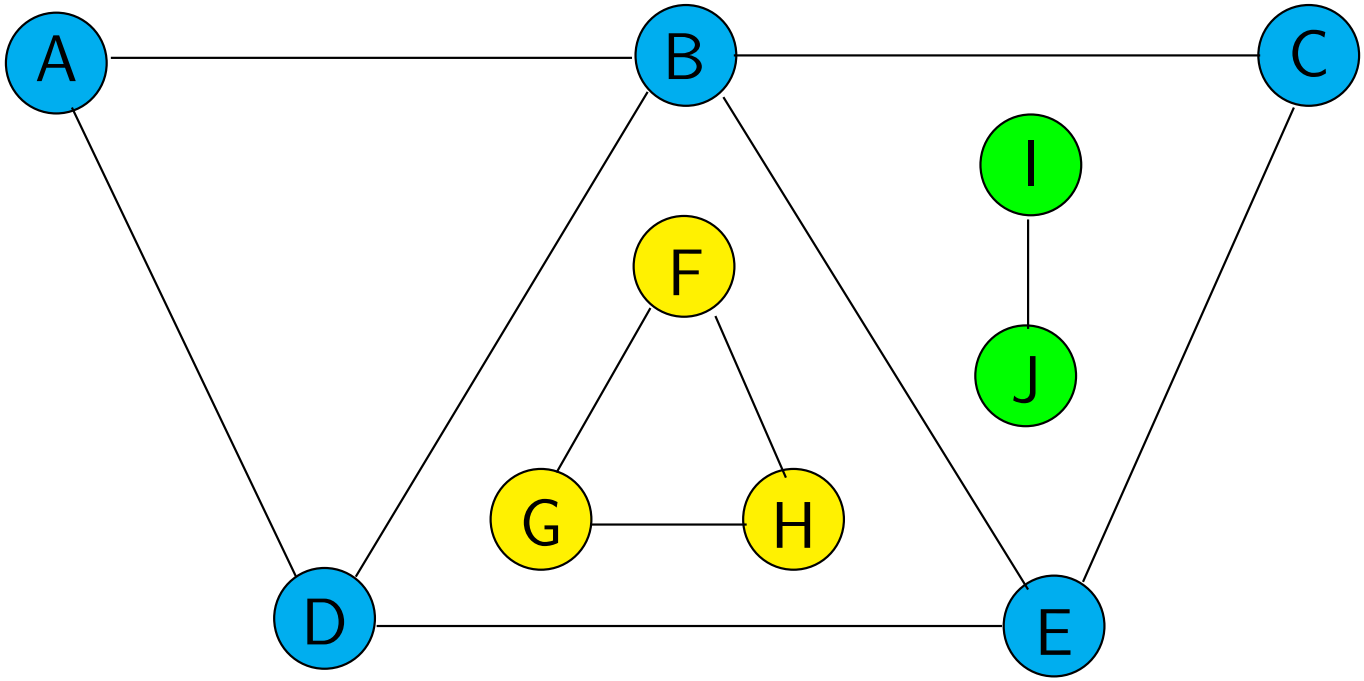
- Ein nicht-verbundener Graph kann eindeutig in verschiedene Zusammenhangskomponenten aufgeteilt werden.

Ungerichtete, zusammenhängende Graphen



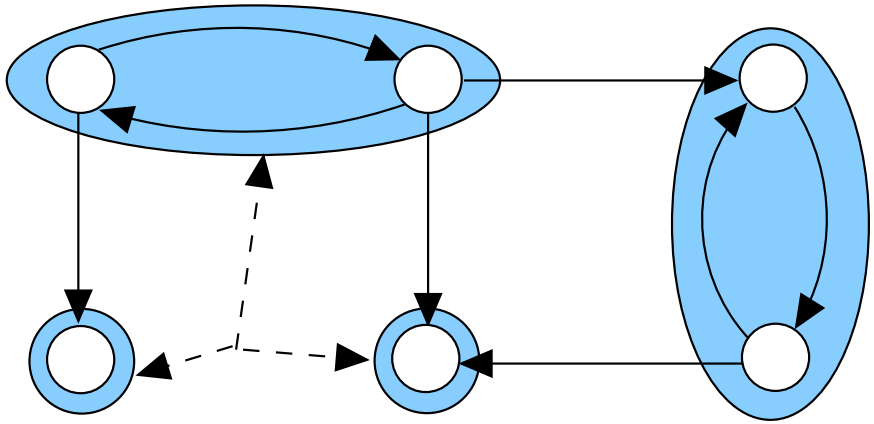
Ein ungerichteter Graph; Was sind die Zusammenhangskomponenten?

Ungerichtete, zusammenhängende Graphen



Die Zusammenhangskomponenten.

Starke Zusammenhangskomponenten



Zusammenhangskomponenten

Ein nicht-zusammenhängender Digraph, aufgeteilt in seine maximalen zusammenhängenden Teilgraphen.

Repräsentation von Graphen – Adjazenzmatrix

Sei $G = (V, E)$ mit $|V| = n$, $|E| = m$ und $V = \{ v_1, \ldots, v_n \}$.

Repräsentation von Graphen – Adjazenzmatrix

Sei $G = (V, E)$ mit $|V| = n$, $|E| = m$ und $V = \{ v_1, \ldots, v_n \}$.

Adjazenzmatrix

Die Adjazenzmatrix-Darstellung eines Graphen ist durch eine $n \times n$ Matrix A gegeben, wobei $A(i, j) = 1$, wenn $(v_i, v_j) \in E$, sonst 0.

Repräsentation von Graphen – Adjazenzmatrix

Sei $G = (V, E)$ mit $|V| = n$, $|E| = m$ und $V = \{ v_1, \ldots, v_n \}$.

Adjazenzmatrix

Die Adjazenzmatrix-Darstellung eines Graphen ist durch eine $n \times n$ Matrix A gegeben, wobei $A(i, j) = 1$, wenn $(v_i, v_j) \in E$, sonst 0.

- Wenn G ungerichtet ist, ergibt sich symmetrisches A (d. h. $A = A^T$). Dann muss nur die Hälfte gespeichert werden.

Repräsentation von Graphen – Adjazenzmatrix

Sei $G = (V, E)$ mit $|V| = n$, $|E| = m$ und $V = \{ v_1, \ldots, v_n \}$.

Adjazenzmatrix

Die Adjazenzmatrix-Darstellung eines Graphen ist durch eine $n \times n$ Matrix A gegeben, wobei $A(i, j) = 1$, wenn $(v_i, v_j) \in E$, sonst 0.

- Wenn G ungerichtet ist, ergibt sich symmetrisches A (d. h. $A = A^T$). Dann muss nur die Hälfte gespeichert werden.

$\Rightarrow$ Platzbedarf: $\Theta(n^2)$.

Repräsentation von Graphen – Adjazenzliste

Adjazenzliste

Bei der Darstellung als Array von Adjazenzlisten gibt es ein durch die Nummer des Knoten indiziertes Array, das jeweils verkettete Listen (Adjazenzlisten) enthält.

- Der i-te Arrayeintrag enthält alle Kanten von G, die von v_i „ausgehen“.

Repräsentation von Graphen – Adjazenzliste

Adjazenzliste

Bei der Darstellung als Array von Adjazenzlisten gibt es ein durch die Nummer des Knoten indiziertes Array, das jeweils verkettete Listen (Adjazenzlisten) enthält.

- Der i-te Arrayeintrag enthält alle Kanten von G, die von v_i „ausgehen“.

- Ist G ungerichtet, dann werden Kanten doppelt gespeichert.

Repräsentation von Graphen – Adjazenzliste

Adjazenzliste

Bei der Darstellung als Array von Adjazenzlisten gibt es ein durch die Nummer des Knoten indiziertes Array, das jeweils verkettete Listen (Adjazenzlisten) enthält.

- Der i-te Arrayeintrag enthält alle Kanten von G, die von v_i „ausgehen“.

- Ist G ungerichtet, dann werden Kanten doppelt gespeichert.
- Kanten, die in G nicht vorkommen, benötigen keinen Speicherplatz.

Repräsentation von Graphen – Adjazenzliste

Adjazenzliste

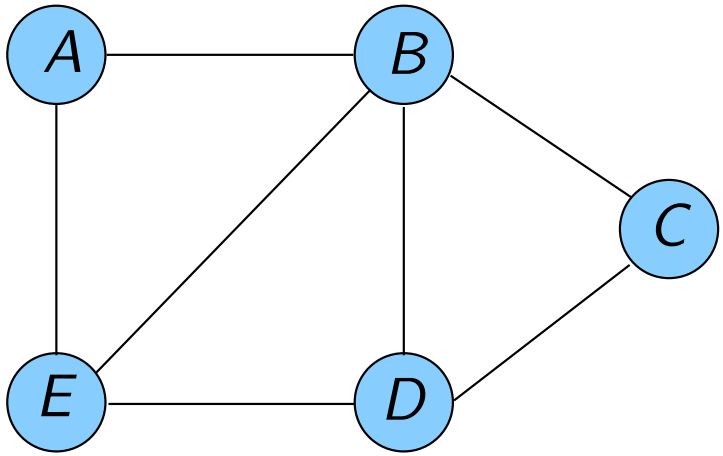
Bei der Darstellung als Array von Adjazenzlisten gibt es ein durch die Nummer des Knoten indiziertes Array, das jeweils verkettete Listen (Adjazenzlisten) enthält.

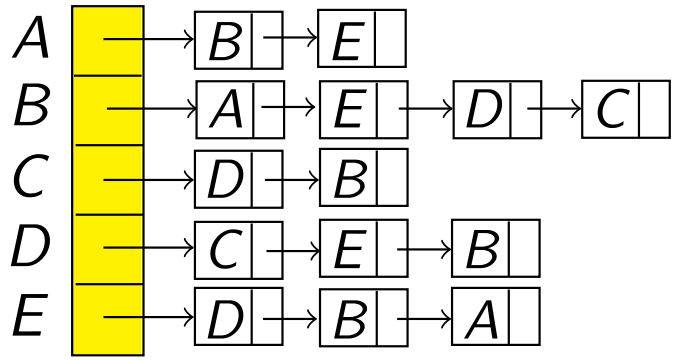
- Der i-te Arrayeintrag enthält alle Kanten von G, die von v_i „ausgehen“.

- Ist G ungerichtet, dann werden Kanten doppelt gespeichert.
- Kanten, die in G nicht vorkommen, benötigen keinen Speicherplatz.

$\Rightarrow$ Platzbedarf: $\Theta(n + m)$.

Darstellung eines ungerichteten Graphen



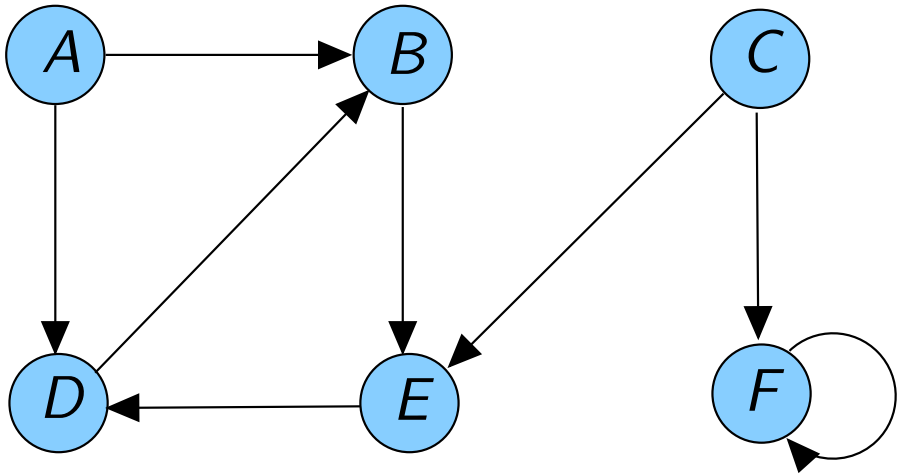


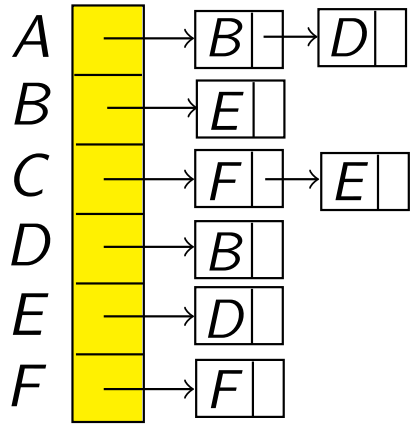
Adjazenzliste

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Adjazenzmatrix

Darstellung eines gerichteten Graphen





Adjazenzliste

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Adjazenzmatrix

Übersicht

Graphendurchlauf (I)

Viele Algorithmen untersuchen jeden Knoten (und jede Kante).

Graphendurchlauf (I)

Viele Algorithmen untersuchen jeden Knoten (und jede Kante).

Es gibt verschiedene Graphendurchlaufstrategien (traversal strategies), die jeden Knoten (oder jede Kante) genau einmal besuchen:

- Tiefensuche
- Breitensuche

Graphendurchlauf (I)

Viele Algorithmen untersuchen jeden Knoten (und jede Kante).

Es gibt verschiedene Graphendurchlaufstrategien (traversal strategies), die jeden Knoten (oder jede Kante) genau einmal besuchen:

- Tiefensuche
- Breitensuche

- Es handelt sich um Verallgemeinerungen von Strategien zur Baumtraversierung.

Graphendurchlauf (I)

Viele Algorithmen untersuchen jeden Knoten (und jede Kante).

Es gibt verschiedene Graphendurchlaufstrategien (traversal strategies), die jeden Knoten (oder jede Kante) genau einmal besuchen:

- Tiefensuche
- Breitensuche

- Es handelt sich um Verallgemeinerungen von Strategien zur Baumtraversierung.
- Nun müssen wir uns aber alle bereits gefundenen Knoten merken.

Graphendurchlauf (I)

Viele Algorithmen untersuchen jeden Knoten (und jede Kante).

Es gibt verschiedene Graphendurchlaufstrategien (traversal strategies), die jeden Knoten (oder jede Kante) genau einmal besuchen:

- Tiefensuche
- Breitensuche

- Es handelt sich um Verallgemeinerungen von Strategien zur Baumtraversierung.
- Nun müssen wir uns aber alle bereits gefundenen Knoten merken.
- Algorithmen auf dieser Basis sind in $O(|V| + |E|)$.

Graphendurchlauf (II)

Beispiele

- Finden von (starken) Zusammenhangskomponenten,
- Topologische Sortierung,
- Kritische-Pfad-Analyse,
- Finden von 2-Zusammenhangskomponenten (biconnected components),
- . . . und viele weitere . . .

Breitensuche

Breitensuche (Breadth-First Search, BFS)

Am Anfang seien alle Knoten als „nicht-gefunden“ (`WHITE`) markiert.
Die zugrundeliegende Strategie ist:

Breitensuche

Breitensuche (Breadth-First Search, BFS)

Am Anfang seien alle Knoten als „nicht-gefunden“ (`WHITE`) markiert.
Die zugrundeliegende Strategie ist:

- Markiere den aktuellen Knoten v als „gefunden“ (`GRAY`).

Breitensuche

Breitensuche (Breadth-First Search, BFS)

Am Anfang seien alle Knoten als „nicht-gefunden“ (`WHITE`) markiert.
Die zugrundeliegende Strategie ist:

- Markiere den aktuellen Knoten v als „gefunden“ (`GRAY`).
- Für jede Kante (v, w) im Graph G mit „nicht-gefundenem“ Nachfolger w:

Breitensuche

Breitensuche (Breadth-First Search, BFS)

Am Anfang seien alle Knoten als „nicht-gefunden“ (`WHITE`) markiert.
Die zugrundeliegende Strategie ist:

- Markiere den aktuellen Knoten v als „gefunden“ (`GRAY`).
- Für jede Kante (v, w) im Graph G mit „nicht-gefundenem“ Nachfolger w:
  - Suche „gleichzeitig“ von allen solchen w aus weiter.

Breitensuche

Breitensuche (Breadth-First Search, BFS)

Am Anfang seien alle Knoten als „nicht-gefunden“ (`WHITE`) markiert.
Die zugrundeliegende Strategie ist:

- Markiere den aktuellen Knoten v als „gefunden“ (`GRAY`).
- Für jede Kante (v, w) im Graph G mit „nicht-gefundenem“ Nachfolger w:
  - Suche „gleichzeitig“ von allen solchen w aus weiter.
  - Kein Backtracking.

Breitensuche

Breitensuche (Breadth-First Search, BFS)

Am Anfang seien alle Knoten als „nicht-gefunden“ (`WHITE`) markiert.
Die zugrundeliegende Strategie ist:

- Markiere den aktuellen Knoten v als „gefunden“ (`GRAY`).
- Für jede Kante (v, w) im Graph G mit „nicht-gefundenem“ Nachfolger w:
  - Suche „gleichzeitig“ von allen solchen w aus weiter.
  - Kein Backtracking.
- Markiere Knoten v als „abgeschlossen“ (`BLACK`).

Breitensuche

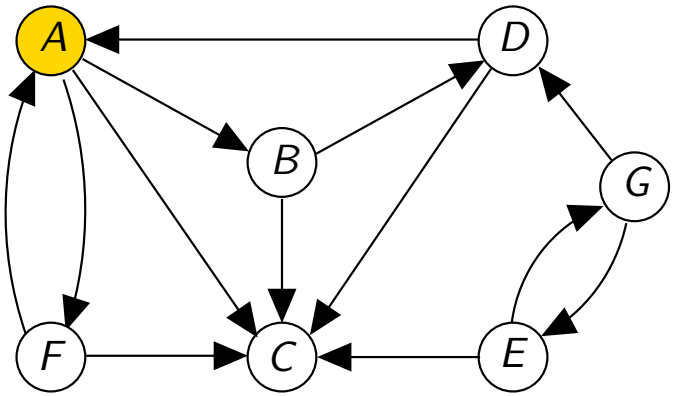
Breitensuche (Breadth-First Search, BFS)

Am Anfang seien alle Knoten als „nicht-gefunden“ (`WHITE`) markiert.
Die zugrundeliegende Strategie ist:

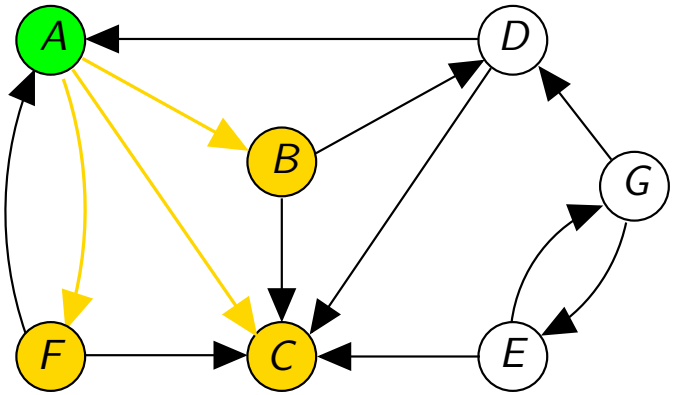
- Markiere den aktuellen Knoten v als „gefunden“ (`GRAY`).
- Für jede Kante (v, w) im Graph G mit „nicht-gefundenem“ Nachfolger w:
  - Suche „gleichzeitig“ von allen solchen w aus weiter.
  - Kein Backtracking.
- Markiere Knoten v als „abgeschlossen“ (`BLACK`).

- Man erhält die Menge aller Knoten, die vom Startknoten aus erreichbar sind.

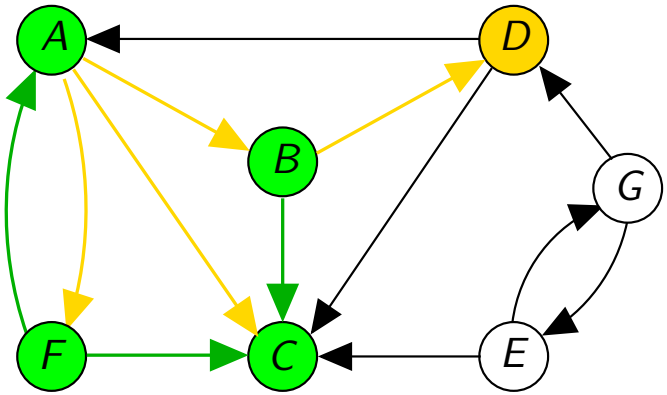
Breitensuche – Beispiel



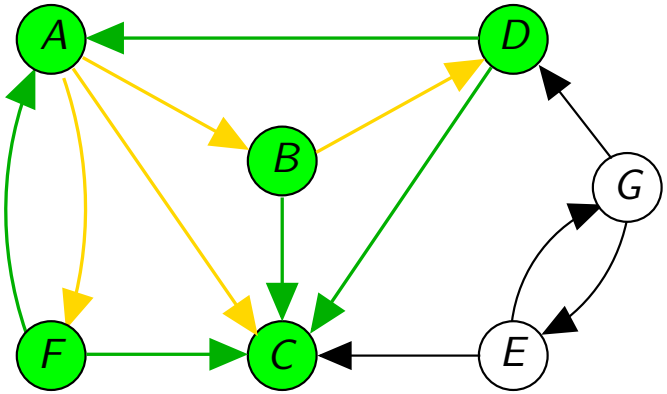
Beginn der Breitensuche



Erforsche alle folgenden nicht-gefundenen Knoten



Erforsche alle folgenden nicht-gefundenen Knoten



Fertig!

Breitensuche – Implementierung

```
1  void bfsSearch(List adjList[n], int n, int start) {
2    int color[n];
3    Queue wait; // zu verarbeitende Knoten
4    for (int i = 0; i < n; i++) {
5      color[i] = WHITE; // noch nicht gefunden
6    }
7    color[start] = GRAY; // start ist noch zu verarbeiten
8    wait.enqueue(start);
9    while (!wait.isEmpty()) {
10     // nächster noch unverarbeiteter Knoten
11     int v = wait.dequeue();
12     foreach (w in adjList[v]) {
13       if (color[w] == WHITE) { // neuer ("ungefundener") Knoten
14         color[w] = GRAY; // w ist noch zu verarbeiten
15         wait.enqueue(w);
16       }
17     }
18     color[v] = BLACK; // v ist abgeschlossen
19   }
20 }
```

Eigenschaften der Breitensuche

- Knoten werden in der Reihenfolge mit zunehmenden Abstand vom Startknoten aus besucht.

Eigenschaften der Breitensuche

- Knoten werden in der Reihenfolge mit zunehmenden Abstand vom Startknoten aus besucht.
  - Nachdem alle Knoten mit Abstand d verarbeitet wurden, werden die mit $d + 1$ angegangen.

Eigenschaften der Breitensuche

- Knoten werden in der Reihenfolge mit zunehmenden Abstand vom Startknoten aus besucht.
  - Nachdem alle Knoten mit Abstand d verarbeitet wurden, werden die mit $d + 1$ angegangen.
  - Die Suche terminiert, wenn in Abstand d keine Knoten auftreten.

Eigenschaften der Breitensuche

- Knoten werden in der Reihenfolge mit zunehmenden Abstand vom Startknoten aus besucht.
  - Nachdem alle Knoten mit Abstand d verarbeitet wurden, werden die mit $d + 1$ angegangen.
  - Die Suche terminiert, wenn in Abstand d keine Knoten auftreten.
- Die Tiefe des Knotens v im Breitensuchbaum ist seine kürzeste Kantendistanz zum Startknoten.

Eigenschaften der Breitensuche

- Knoten werden in der Reihenfolge mit zunehmenden Abstand vom Startknoten aus besucht.
  - Nachdem alle Knoten mit Abstand d verarbeitet wurden, werden die mit $d + 1$ angegangen.
  - Die Suche terminiert, wenn in Abstand d keine Knoten auftreten.
- Die Tiefe des Knotens v im Breitensuchbaum ist seine kürzeste Kantendistanz zum Startknoten.
- Die zu verarbeitenden Knoten werden als FIFO-Queue (first-in first-out) organisiert.

Eigenschaften der Breitensuche

- Knoten werden in der Reihenfolge mit zunehmenden Abstand vom Startknoten aus besucht.
  - Nachdem alle Knoten mit Abstand d verarbeitet wurden, werden die mit $d + 1$ angegangen.
  - Die Suche terminiert, wenn in Abstand d keine Knoten auftreten.
- Die Tiefe des Knotens v im Breitensuchbaum ist seine kürzeste Kantendistanz zum Startknoten.
- Die zu verarbeitenden Knoten werden als FIFO-Queue (first-in first-out) organisiert.
- Es gibt eine einzige „Verarbeitungsmöglichkeit“ für v, nämlich, wenn es aus der Queue entnommen wird.

Eigenschaften der Breitensuche

- Knoten werden in der Reihenfolge mit zunehmenden Abstand vom Startknoten aus besucht.
  - Nachdem alle Knoten mit Abstand d verarbeitet wurden, werden die mit $d + 1$ angegangen.
  - Die Suche terminiert, wenn in Abstand d keine Knoten auftreten.
- Die Tiefe des Knotens v im Breitensuchbaum ist seine kürzeste Kantendistanz zum Startknoten.
- Die zu verarbeitenden Knoten werden als FIFO-Queue (first-in first-out) organisiert.
- Es gibt eine einzige „Verarbeitungsmöglichkeit“ für v, nämlich, wenn es aus der Queue entnommen wird.

Theorem (Komplexität der Breitensuche)

Die Zeitkomplexität ist $O(|V| + |E|)$, der Platzbedarf $\Theta(|V|)$.

Tiefensuche

Tiefensuche (Depth-First Search, DFS)

Am Anfang seien alle Knoten als „nicht-gefunden“ (`WHITE`) markiert.

Tiefensuche

Tiefensuche (Depth-First Search, DFS)

Am Anfang seien alle Knoten als „nicht-gefunden“ (`WHITE`) markiert.
Die zugrundeliegende Strategie ist:

Tiefensuche

Tiefensuche (Depth-First Search, DFS)

Am Anfang seien alle Knoten als „nicht-gefunden“ (`WHITE`) markiert.
Die zugrundeliegende Strategie ist:

- Markiere den aktuellen Knoten v als „gefunden“ (`GRAY`).

Tiefensuche

Tiefensuche (Depth-First Search, DFS)

Am Anfang seien alle Knoten als „nicht-gefunden“ (`WHITE`) markiert.
Die zugrundeliegende Strategie ist:

- Markiere den aktuellen Knoten v als „gefunden“ (`GRAY`).
- Für jede Kante (v, w) im Graph G mit „nicht-gefundenem“ Nachfolger w:

Tiefensuche

Tiefensuche (Depth-First Search, DFS)

Am Anfang seien alle Knoten als „nicht-gefunden“ (`WHITE`) markiert.
Die zugrundeliegende Strategie ist:

- Markiere den aktuellen Knoten v als „gefunden“ (`GRAY`).
- Für jede Kante (v, w) im Graph G mit „nicht-gefundenem“ Nachfolger w:
  - Suche rekursiv von w aus, d. h.:

Tiefensuche

Tiefensuche (Depth-First Search, DFS)

Am Anfang seien alle Knoten als „nicht-gefunden“ (`WHITE`) markiert.
Die zugrundeliegende Strategie ist:

- Markiere den aktuellen Knoten v als „gefunden“ (`GRAY`).
- Für jede Kante (v, w) im Graph G mit „nicht-gefundenem“ Nachfolger w:
  - Suche rekursiv von w aus, d. h.:
  - Erforsche Kante (v, w), besuche w, forsche von dort aus, bis es nicht mehr weiter geht.

Tiefensuche

Tiefensuche (Depth-First Search, DFS)

Am Anfang seien alle Knoten als „nicht-gefunden“ (`WHITE`) markiert.
Die zugrundeliegende Strategie ist:

- Markiere den aktuellen Knoten v als „gefunden“ (`GRAY`).
- Für jede Kante (v, w) im Graph G mit „nicht-gefundenem“ Nachfolger w:
  - Suche rekursiv von w aus, d. h.:
  - Erforsche Kante (v, w), besuche w, forsche von dort aus, bis es nicht mehr weiter geht.
  - Dann backtracke von w nach v.

Tiefensuche

Tiefensuche (Depth-First Search, DFS)

Am Anfang seien alle Knoten als „nicht-gefunden“ (`WHITE`) markiert.
Die zugrundeliegende Strategie ist:

- Markiere den aktuellen Knoten v als „gefunden“ (`GRAY`).
- Für jede Kante (v, w) im Graph G mit „nicht-gefundenem“ Nachfolger w:
  - Suche rekursiv von w aus, d. h.:
  - Erforsche Kante (v, w), besuche w, forsche von dort aus, bis es nicht mehr weiter geht.
  - Dann backtracke von w nach v.
- Für jede Kante (v, w) in G mit gefundenem Nachfolger w:

Tiefensuche

Tiefensuche (Depth-First Search, DFS)

Am Anfang seien alle Knoten als „nicht-gefunden“ (`WHITE`) markiert.
Die zugrundeliegende Strategie ist:

- Markiere den aktuellen Knoten v als „gefunden“ (`GRAY`).
- Für jede Kante (v, w) im Graph G mit „nicht-gefundenem“ Nachfolger w:
  - Suche rekursiv von w aus, d. h.:
  - Erforsche Kante (v, w), besuche w, forsche von dort aus, bis es nicht mehr weiter geht.
  - Dann backtracke von w nach v.
- Für jede Kante (v, w) in G mit gefundenem Nachfolger w:
  - „Überprüfe“ die Kante, ohne aber w zu besuchen.

Tiefensuche

Tiefensuche (Depth-First Search, DFS)

Am Anfang seien alle Knoten als „nicht-gefunden“ (`WHITE`) markiert.
Die zugrundeliegende Strategie ist:

- Markiere den aktuellen Knoten v als „gefunden“ (`GRAY`).
- Für jede Kante (v, w) im Graph G mit „nicht-gefundenem“ Nachfolger w:
  - Suche rekursiv von w aus, d. h.:
  - Erforsche Kante (v, w), besuche w, forsche von dort aus, bis es nicht mehr weiter geht.
  - Dann backtracke von w nach v.
- Für jede Kante (v, w) in G mit gefundenem Nachfolger w:
  - „Überprüfe“ die Kante, ohne aber w zu besuchen.
- Markiere Knoten v als „abgeschlossen“ (`BLACK`).

Tiefensuche

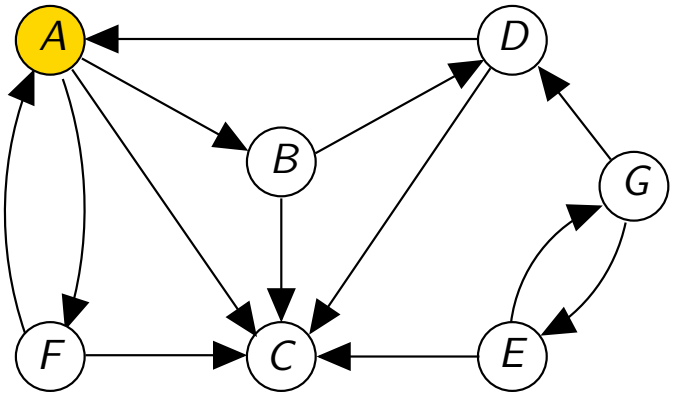
Tiefensuche (Depth-First Search, DFS)

Am Anfang seien alle Knoten als „nicht-gefunden“ (`WHITE`) markiert.
Die zugrundeliegende Strategie ist:

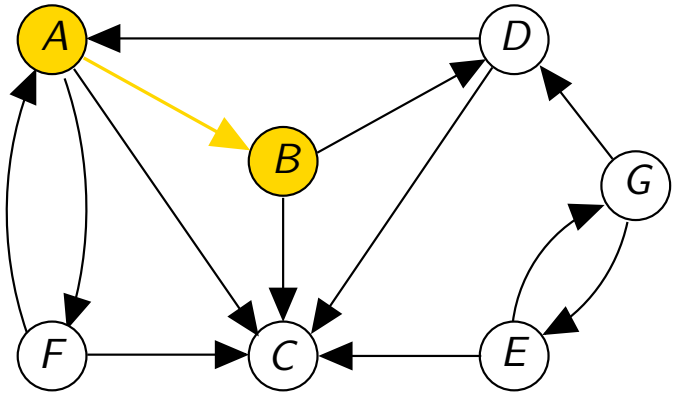
- Markiere den aktuellen Knoten v als „gefunden“ (`GRAY`).
- Für jede Kante (v, w) im Graph G mit „nicht-gefundenem“ Nachfolger w:
  - Suche rekursiv von w aus, d. h.:
  - Erforsche Kante (v, w), besuche w, forsche von dort aus, bis es nicht mehr weiter geht.
  - Dann backtracke von w nach v.
- Für jede Kante (v, w) in G mit gefundenem Nachfolger w:
  - „Überprüfe“ die Kante, ohne aber w zu besuchen.
- Markiere Knoten v als „abgeschlossen“ (`BLACK`).

- Man erhält wieder die Menge aller Knoten, die vom Startknoten aus erreichbar sind.

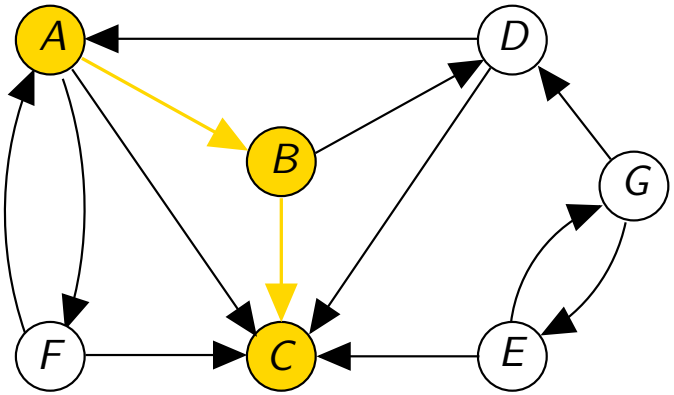
Tiefensuche – Beispiel (I)



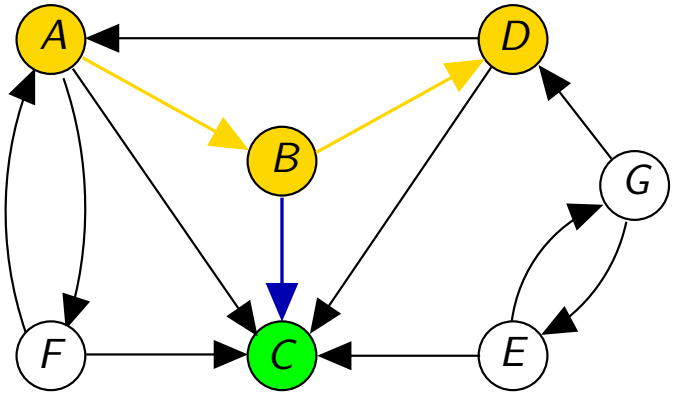
Beginn der Tiefensuche



Erforsche einen Knoten

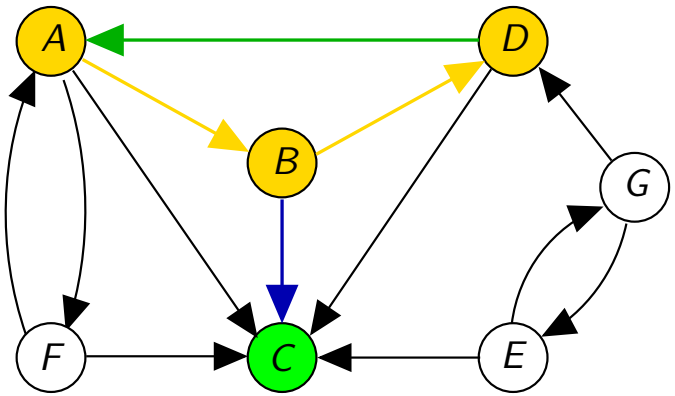


Erforsche einen Knoten

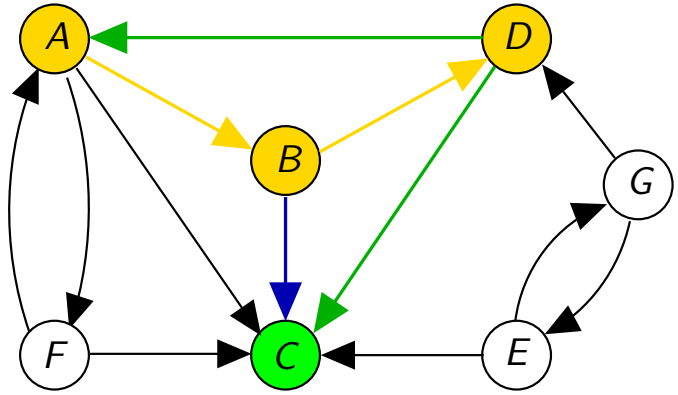


Sackgasse!
Backtracke und erforsche den nächsten Knoten

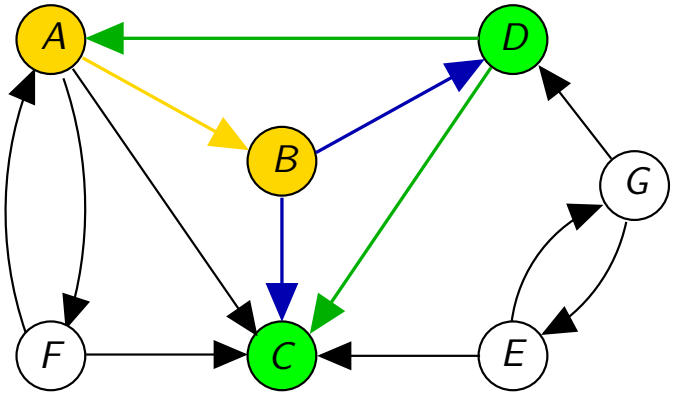
Tiefensuche – Beispiel (II)



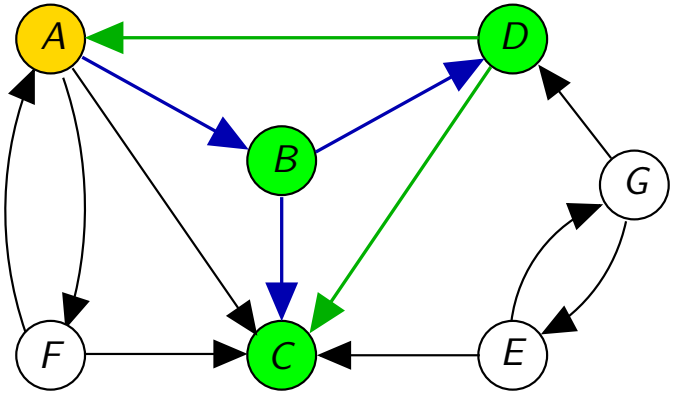
Nächster Zustand wurde bereits gefunden
Backtracke und erforsche den nächsten Knoten



Nächster Zustand wurde bereits gefunden
Backtracke und erforsche den nächsten Knoten

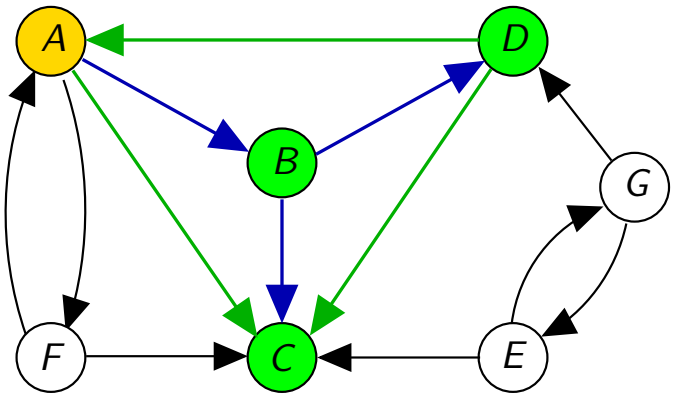


D ist eine Sackgasse
Backtracke und erforsche den nächsten Knoten

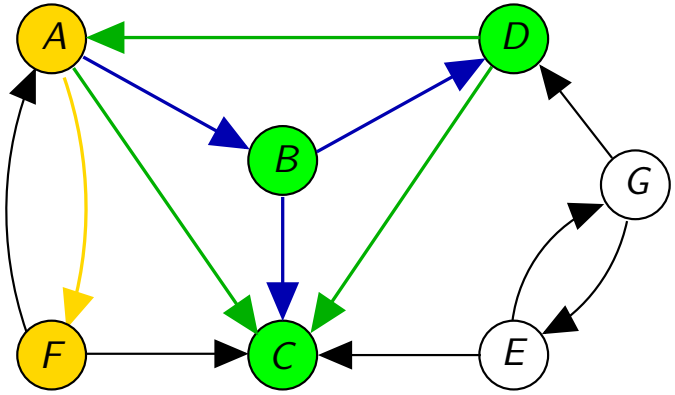


B ist eine Sackgasse
Backtracke und erforsche den nächsten Knoten

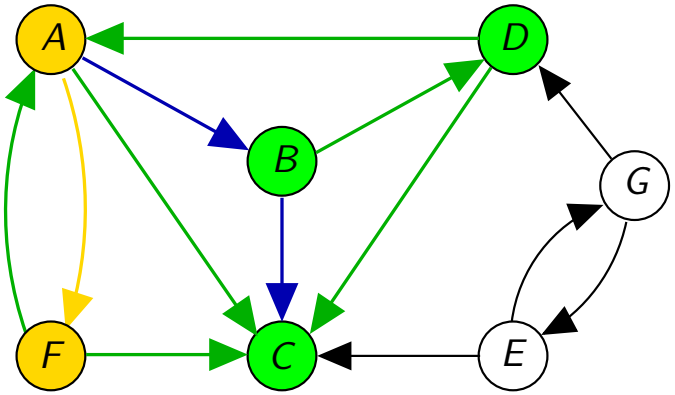
Tiefensuche – Beispiel (III)



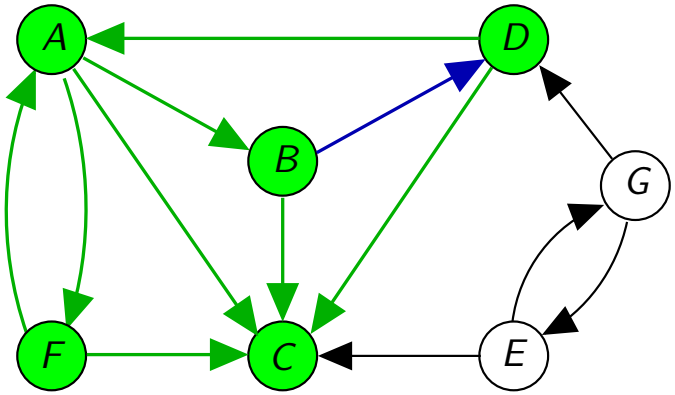
C wurde bereits gefunden
Backtracke und erforsche den nächsten Knoten



Erforsche den nächsten Knoten



Beide nächsten Knoten wurden bereits gefunden



Fertig!

Tiefensuche – Implementierung

```
1  void dfsRec(List adjList[n], int n, int start, int &color[n]) {
2    color[start] = GRAY;
3    foreach (next in adjList[start]) {
4      if (color[next] == WHITE) {
5        dfsSRec(adjList, n, next, color);
6      }
7    }
8    color[start] = BLACK;
9  }

11 void dfsSearch(List adjList[n], int n, int start) {
12   int color[n];
13   for (int i = 0; i < n; i++) { // Initialisierung
14     color[i] = WHITE;
15   }
16   dfsRec(adjList, n, start, color);
17 }
```

Eigenschaften der Tiefensuche

- Erforsche einen Pfad so weit wie möglich, bevor man backtrackt.

Eigenschaften der Tiefensuche

- Erforsche einen Pfad so weit wie möglich, bevor man backtrackt.
- Das entspricht der Reihenfolge der rekursiven Aufrufe.

Eigenschaften der Tiefensuche

- Erforsche einen Pfad so weit wie möglich, bevor man backtrackt.
- Das entspricht der Reihenfolge der rekursiven Aufrufe.
- Die zu verarbeitenden Knoten werden in LIFO-Reihenfolge geprüft.

Eigenschaften der Tiefensuche

- Erforsche einen Pfad so weit wie möglich, bevor man backtrackt.
- Das entspricht der Reihenfolge der rekursiven Aufrufe.
- Die zu verarbeitenden Knoten werden in LIFO-Reihenfolge geprüft.
- Es gibt zwei „Verarbeitungsmöglichkeiten“ für einen Knoten:

Eigenschaften der Tiefensuche

- Erforsche einen Pfad so weit wie möglich, bevor man backtrackt.
- Das entspricht der Reihenfolge der rekursiven Aufrufe.
- Die zu verarbeitenden Knoten werden in LIFO-Reihenfolge geprüft.
- Es gibt zwei „Verarbeitungsmöglichkeiten“ für einen Knoten:
  1. Wenn der Knoten entdeckt wird.

Eigenschaften der Tiefensuche

- Erforsche einen Pfad so weit wie möglich, bevor man backtrackt.
- Das entspricht der Reihenfolge der rekursiven Aufrufe.
- Die zu verarbeitenden Knoten werden in LIFO-Reihenfolge geprüft.
- Es gibt zwei „Verarbeitungsmöglichkeiten“ für einen Knoten:
  1. Wenn der Knoten entdeckt wird.
  2. Wenn der Knoten als „abgearbeitet“ markiert wird (und alle seine Nachfolger entdeckt werden).

Eigenschaften der Tiefensuche

- Erforsche einen Pfad so weit wie möglich, bevor man backtrackt.
- Das entspricht der Reihenfolge der rekursiven Aufrufe.
- Die zu verarbeitenden Knoten werden in LIFO-Reihenfolge geprüft.
- Es gibt zwei „Verarbeitungsmöglichkeiten“ für einen Knoten:
  1. Wenn der Knoten entdeckt wird.
  2. Wenn der Knoten als „abgearbeitet“ markiert wird (und alle seine Nachfolger entdeckt werden).

$\Rightarrow$ Diese letztgenannte Möglichkeit macht Tiefensuche beliebt.

Eigenschaften der Tiefensuche

- Erforsche einen Pfad so weit wie möglich, bevor man backtrackt.
- Das entspricht der Reihenfolge der rekursiven Aufrufe.
- Die zu verarbeitenden Knoten werden in LIFO-Reihenfolge geprüft.
- Es gibt zwei „Verarbeitungsmöglichkeiten“ für einen Knoten:
  1. Wenn der Knoten entdeckt wird.
  2. Wenn der Knoten als „abgearbeitet“ markiert wird (und alle seine Nachfolger entdeckt werden).

$\Rightarrow$ Diese letztgenannte Möglichkeit macht Tiefensuche beliebt.

Theorem (Komplexität der Tiefensuche)

Zeitkomplexität: $O(|V| + |E|)$, *Platzkomplexität:* $\Theta(|V|)$.

Finden von Zusammenhangskomponenten (I)

Problem

Finde die Zusammenhangskomponenten des ungerichteten Graphen G.

Finden von Zusammenhangskomponenten (I)

Problem

Finde die Zusammenhangskomponenten des ungerichteten Graphen G.

Lösung

- *Konstruiere den zugehörigen symmetrischen Digraph (mit $2 \cdot |E|$ Kanten).*

Finden von Zusammenhangskomponenten (I)

Problem

Finde die Zusammenhangskomponenten des ungerichteten Graphen G.

Lösung

- *Konstruiere den zugehörigen symmetrischen Digraph (mit $2 \cdot |E|$ Kanten).*
- *Verwende Tiefensuche:*

Finden von Zusammenhangskomponenten (I)

Problem

Finde die Zusammenhangskomponenten des ungerichteten Graphen G.

Lösung

- *Konstruiere den zugehörigen symmetrischen Digraph (mit $2 \cdot |E|$ Kanten).*
- *Verwende Tiefensuche:*
  - *Beginne bei einem beliebigen Knoten.*

Finden von Zusammenhangskomponenten (I)

Problem

Finde die Zusammenhangskomponenten des ungerichteten Graphen G.

Lösung

- *Konstruiere den zugehörigen symmetrischen Digraph (mit $2 \cdot |E|$ Kanten).*
- *Verwende Tiefensuche:*
  - *Beginne bei einem beliebigen Knoten.*
  - *Finde alle anderen Knoten (und Kanten) in der selben Komponente mit DFS.*

Finden von Zusammenhangskomponenten (I)

Problem

Finde die Zusammenhangskomponenten des ungerichteten Graphen G.

Lösung

- *Konstruiere den zugehörigen symmetrischen Digraph (mit $2 \cdot |E|$ Kanten).*
- *Verwende Tiefensuche:*
  - *Beginne bei einem beliebigen Knoten.*
  - *Finde alle anderen Knoten (und Kanten) in der selben Komponente mit DFS.*
  - *Wenn es weitere Knoten gibt, wähle einen und wiederhole das Verfahren.*

Finden von Zusammenhangskomponenten (I)

Problem

Finde die Zusammenhangskomponenten des ungerichteten Graphen G.

Lösung

- *Konstruiere den zugehörigen symmetrischen Digraph (mit $2 \cdot |E|$ Kanten).*
- *Verwende Tiefensuche:*
  - *Beginne bei einem beliebigen Knoten.*
  - *Finde alle anderen Knoten (und Kanten) in der selben Komponente mit DFS.*
  - *Wenn es weitere Knoten gibt, wähle einen und wiederhole das Verfahren.*

- Man erhält einen Tiefensuchwald.
- Die Zeitkomplexität ist $\Theta(|V| + |E|)$.

Finden von Zusammenhangskomponenten (II)

```
1  // Ausgabe in cc: cc[v] = Komponente von Knoten v
2  void connComponents(List adjLst[n], int n, int &cc[n]) {
3    int color[n], ccNum = 0;
4    for (int v = 0; v < n; v++) { // Initialisierung
5      color[v] = WHITE;
6    }
7    for (int v = 0; v < n; v++) {
8      if (color[v] == WHITE) { // weitere Komponente
9        dfsSearch(adjLst, n, v, ccNum++, cc);
10     }
11   }
12 }
```

Finden von Zusammenhangskomponenten (III)

```
1  void dfsSearch(List adjLst[n], int n, int start, int &color[n],
2                 int ccNum, int &cc[n]) {
3    color[start] = GRAY;
4    cc[start] = ccNum; // speichere Nummer der Komponente von v
5    foreach (next in adjLst[start]) {
6      if (color[next] == WHITE) {
7        dfsSearch(adjLst, n, next, color, ccNum, cc);
8      }
9    }
10   color[start] = BLACK;
11 }
```