Datenstrukturen und Algorithmen

Vorlesung 15: Elementare Graphenalgorithmen II

Joost-Pieter Katoen

Lehrstuhl für Informatik 2
Software Modeling and Verification Group

http://www-i2.informatik.rwth-aachen.de/i2/dsal12/

12. Juni 2012

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Übersicht

1. Starke Zusammenhangskomponenten
   - Kondensationsgraph
   - Sharir's Algorithmus
2. Gerichtete zykelfreie Graphen
   - Topologische Sortierung
   - Kritische-Pfad-Analyse

Übersicht

Zusammenhängende gerichtete Graphen

Sei G ein gerichteter Graph.

Zusammenhängende gerichtete Graphen

Sei G ein gerichteter Graph.

Zusammenhang

- G heißt stark zusammenhängend (strongly connected), wenn jeder Knoten von jedem anderen aus erreichbar ist.

Zusammenhängende gerichtete Graphen

Sei G ein gerichteter Graph.

Zusammenhang

- G heißt stark zusammenhängend (strongly connected), wenn jeder Knoten von jedem anderen aus erreichbar ist.
- G heißt schwach zusammenhängend, wenn der zugehörige ungerichtete Graph (wenn man alle Kanten ungerichtet macht) zusammenhängend ist.

Zusammenhängende gerichtete Graphen

Sei G ein gerichteter Graph.

Zusammenhang

- G heißt stark zusammenhängend (strongly connected), wenn jeder Knoten von jedem anderen aus erreichbar ist.
- G heißt schwach zusammenhängend, wenn der zugehörige ungerichtete Graph (wenn man alle Kanten ungerichtet macht) zusammenhängend ist.
- Eine starke Zusammenhangskomponente (strongly connected component) von G ist ein maximaler stark zusammenhängender Teilgraph von G.

Zusammenhängende gerichtete Graphen

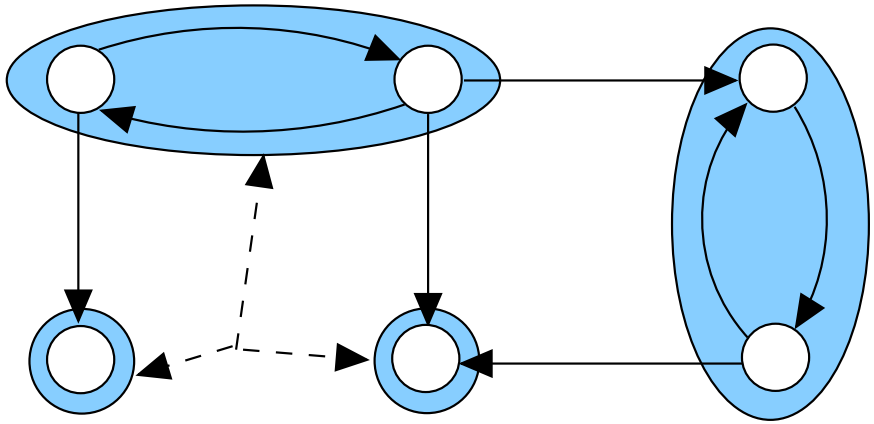
Sei G ein gerichteter Graph.

Zusammenhang

- G heißt stark zusammenhängend (strongly connected), wenn jeder Knoten von jedem anderen aus erreichbar ist.
- G heißt schwach zusammenhängend, wenn der zugehörige ungerichtete Graph (wenn man alle Kanten ungerichtet macht) zusammenhängend ist.
- Eine starke Zusammenhangskomponente (strongly connected component) von G ist ein maximaler stark zusammenhängender Teilgraph von G.

- Ein nicht-verbundener Graph kann eindeutig in verschiedene Zusammenhangskomponenten aufgeteilt werden.

Starke Zusammenhangskomponenten



Zusammenhangskomponenten

Ein nicht-zusammenhängender Digraph, aufgeteilt in seine maximalen zusammenhängenden Teilgraphen.

Kondensationsgraph

Kondensationsgraph

Die starken Komponenten von G induzieren den Kondensationsgraph.

Kondensationsgraph

Die starken Komponenten von G induzieren den Kondensationsgraph.

Kondensationsgraph

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit k starken Komponenten $S_i = (V_i, E_i)$ für $0 < i \leqslant k$.

Kondensationsgraph

Die starken Komponenten von G induzieren den Kondensationsgraph.

Kondensationsgraph

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit k starken Komponenten $S_i = (V_i, E_i)$ für $0 < i \leqslant k$.

Der Kondensationsgraph $G{\downarrow} = (V', E')$ ist definiert als:

- $V' = \{ V_1, \ldots, V_k \}$.

Kondensationsgraph

Die starken Komponenten von G induzieren den Kondensationsgraph.

Kondensationsgraph

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit k starken Komponenten $S_i = (V_i, E_i)$ für $0 < i \leqslant k$.

Der Kondensationsgraph $G{\downarrow} = (V', E')$ ist definiert als:

- $V' = \{ V_1, \ldots, V_k \}$.
- $(V_i, V_j) \in E'$ gdw. $i \neq j$ und es gibt $(v, w) \in E$ mit $v \in V_i$ und $w \in V_j$.

Kondensationsgraph

Die starken Komponenten von G induzieren den Kondensationsgraph.

Kondensationsgraph

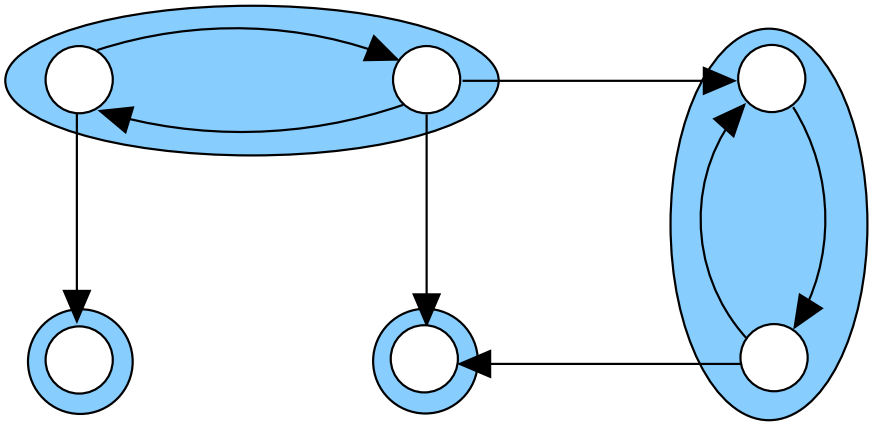
Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit k starken Komponenten $S_i = (V_i, E_i)$ für $0 < i \leqslant k$.

Der Kondensationsgraph $G{\downarrow} = (V', E')$ ist definiert als:

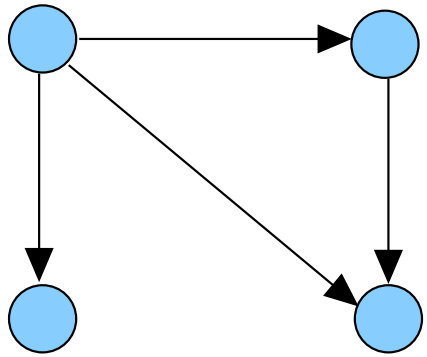
- $V' = \{ V_1, \ldots, V_k \}$.
- $(V_i, V_j) \in E'$ gdw. $i \neq j$ und es gibt $(v, w) \in E$ mit $v \in V_i$ und $w \in V_j$.

Der Kondensationsgraph $G{\downarrow}$ ist azyklisch.

Kondensationsgraph – Beispiel



starke Zusammenhangskomponenten



Ein nicht-zusammenhängender Digraph und seine Kondensation.

Starke Komponenten und Transponierung

Starke Komponenten und Transponierung

Transponieren

Der transponierte Graph von $G = (V, E)$ ist $G^T = (V, E')$ mit $(v, w) \in E'$ gdw. $(w, v) \in E$.

In G^T ist die Richtung der Kanten von G gerade umgedreht.

Starke Komponenten und Transponierung

Transponieren

Der transponierte Graph von $G = (V, E)$ ist $G^T = (V, E')$ mit $(v, w) \in E'$ gdw. $(w, v) \in E$.

In G^T ist die Richtung der Kanten von G gerade umgedreht.

Lemma: Beziehung zwischen G und G^T

Starke Komponenten und Transponierung

Transponieren

Der transponierte Graph von $G = (V, E)$ ist $G^T = (V, E')$ mit $(v, w) \in E'$ gdw. $(w, v) \in E$.

In G^T ist die Richtung der Kanten von G gerade umgedreht.

Lemma: Beziehung zwischen G und G^T

1. Die starken Komponenten von G und G^T sind die selben.

Starke Komponenten und Transponierung

Transponieren

Der transponierte Graph von $G = (V, E)$ ist $G^T = (V, E')$ mit $(v, w) \in E'$ gdw. $(w, v) \in E$.

In G^T ist die Richtung der Kanten von G gerade umgedreht.

Lemma: Beziehung zwischen G und G^T

1. Die starken Komponenten von G und G^T sind die selben.
2. Die Kondensation und die Transposition kommutieren, d. h.:

$$(G\downarrow)^T = (G^T)\downarrow.$$

Starke Komponenten und Transponierung

Transponieren

Der transponierte Graph von $G = (V, E)$ ist $G^T = (V, E')$ mit $(v, w) \in E'$ gdw. $(w, v) \in E$.

In G^T ist die Richtung der Kanten von G gerade umgedreht.

Lemma: Beziehung zwischen G und G^T

1. Die starken Komponenten von G und G^T sind die selben.
2. Die Kondensation und die Transposition kommutieren, d. h.:

$$(G\downarrow)^T = (G^T)\downarrow.$$

Beweis: Übungsaufgabe.

Erinnerung: Tiefensuche

Tiefensuche (Depth-First Search, DFS)

Am Anfang seien alle Knoten als „nicht-gefunden“ (`WHITE`) markiert.

Erinnerung: Tiefensuche

Tiefensuche (Depth-First Search, DFS)

Am Anfang seien alle Knoten als „nicht-gefunden“ (`WHITE`) markiert.
Die zugrundeliegende Strategie ist:

Erinnerung: Tiefensuche

Tiefensuche (Depth-First Search, DFS)

Am Anfang seien alle Knoten als „nicht-gefunden“ (`WHITE`) markiert.
Die zugrundeliegende Strategie ist:

- Markiere den aktuellen Knoten v als „gefunden“ (`GRAY`).

Erinnerung: Tiefensuche

Tiefensuche (Depth-First Search, DFS)

Am Anfang seien alle Knoten als „nicht-gefunden“ (`WHITE`) markiert.
Die zugrundeliegende Strategie ist:

- Markiere den aktuellen Knoten v als „gefunden“ (`GRAY`).
- Für jede Kante (v, w) im Graph G mit „nicht-gefundenem“ Nachfolger w:

Erinnerung: Tiefensuche

Tiefensuche (Depth-First Search, DFS)

Am Anfang seien alle Knoten als „nicht-gefunden“ (`WHITE`) markiert.
Die zugrundeliegende Strategie ist:

- Markiere den aktuellen Knoten v als „gefunden“ (`GRAY`).
- Für jede Kante (v, w) im Graph G mit „nicht-gefundenem“ Nachfolger w:
  - Suche rekursiv von w aus, d. h.:

Erinnerung: Tiefensuche

Tiefensuche (Depth-First Search, DFS)

Am Anfang seien alle Knoten als „nicht-gefunden“ (`WHITE`) markiert.
Die zugrundeliegende Strategie ist:

- Markiere den aktuellen Knoten v als „gefunden“ (`GRAY`).
- Für jede Kante (v, w) im Graph G mit „nicht-gefundenem“ Nachfolger w:
  - Suche rekursiv von w aus, d. h.:
  - Erforsche Kante (v, w), besuche w, forsche von dort aus, bis es nicht mehr weiter geht.

Erinnerung: Tiefensuche

Tiefensuche (Depth-First Search, DFS)

Am Anfang seien alle Knoten als „nicht-gefunden“ (`WHITE`) markiert.
Die zugrundeliegende Strategie ist:

- Markiere den aktuellen Knoten v als „gefunden“ (`GRAY`).
- Für jede Kante (v, w) im Graph G mit „nicht-gefundenem“ Nachfolger w:
  - Suche rekursiv von w aus, d. h.:
  - Erforsche Kante (v, w), besuche w, forsche von dort aus, bis es nicht mehr weiter geht.
  - Dann backtracke von w nach v.

Erinnerung: Tiefensuche

Tiefensuche (Depth-First Search, DFS)

Am Anfang seien alle Knoten als „nicht-gefunden“ (`WHITE`) markiert.
Die zugrundeliegende Strategie ist:

- Markiere den aktuellen Knoten v als „gefunden“ (`GRAY`).
- Für jede Kante (v, w) im Graph G mit „nicht-gefundenem“ Nachfolger w:
  - Suche rekursiv von w aus, d. h.:
  - Erforsche Kante (v, w), besuche w, forsche von dort aus, bis es nicht mehr weiter geht.
  - Dann backtracke von w nach v.
- Für jede Kante (v, w) in G mit gefundenem Nachfolger w:

Erinnerung: Tiefensuche

Tiefensuche (Depth-First Search, DFS)

Am Anfang seien alle Knoten als „nicht-gefunden“ (`WHITE`) markiert.
Die zugrundeliegende Strategie ist:

- Markiere den aktuellen Knoten v als „gefunden“ (`GRAY`).
- Für jede Kante (v, w) im Graph G mit „nicht-gefundenem“ Nachfolger w:
  - Suche rekursiv von w aus, d. h.:
  - Erforsche Kante (v, w), besuche w, forsche von dort aus, bis es nicht mehr weiter geht.
  - Dann backtracke von w nach v.
- Für jede Kante (v, w) in G mit gefundenem Nachfolger w:
  - „Überprüfe“ die Kante, ohne aber w zu besuchen.

Erinnerung: Tiefensuche

Tiefensuche (Depth-First Search, DFS)

Am Anfang seien alle Knoten als „nicht-gefunden“ (`WHITE`) markiert.
Die zugrundeliegende Strategie ist:

- Markiere den aktuellen Knoten v als „gefunden“ (`GRAY`).
- Für jede Kante (v, w) im Graph G mit „nicht-gefundenem“ Nachfolger w:
  - Suche rekursiv von w aus, d. h.:
  - Erforsche Kante (v, w), besuche w, forsche von dort aus, bis es nicht mehr weiter geht.
  - Dann backtracke von w nach v.
- Für jede Kante (v, w) in G mit gefundenem Nachfolger w:
  - „Überprüfe“ die Kante, ohne aber w zu besuchen.
- Markiere Knoten v als „abgeschlossen“ (`BLACK`).

Erinnerung: Tiefensuche

Tiefensuche (Depth-First Search, DFS)

Am Anfang seien alle Knoten als „nicht-gefunden“ (`WHITE`) markiert.
Die zugrundeliegende Strategie ist:

- Markiere den aktuellen Knoten v als „gefunden“ (`GRAY`).
- Für jede Kante (v, w) im Graph G mit „nicht-gefundenem“ Nachfolger w:
  - Suche rekursiv von w aus, d. h.:
  - Erforsche Kante (v, w), besuche w, forsche von dort aus, bis es nicht mehr weiter geht.
  - Dann backtracke von w nach v.
- Für jede Kante (v, w) in G mit gefundenem Nachfolger w:
  - „Überprüfe“ die Kante, ohne aber w zu besuchen.
- Markiere Knoten v als „abgeschlossen“ (`BLACK`).

- Man erhält wieder die Menge aller Knoten, die vom Startknoten aus erreichbar sind.

DFS auf einen Graphen

```
1  void dfsGraphSearch(List adjLst[n], int n) {
2    int color[n];
3    for (int v = 0; v < n; v++) { color[v] = WHITE; }
4    for (int v = 0; v < n; v++) {
5       if (color[v] == WHITE) { dfsSearch(adjLst, n, v, color); }
6    }
7  }

9  void dfsSearch(List adjL[n], int n, int start, int &color[n]) {
10   color[start] = GRAY;
11   foreach (next in adjL[start]) {
12     if (color[next] == WHITE) {
13        dfsSearch(adjL, n, next, color);
14     }
15   }
16   color[start] = BLACK; // Schliesse ab
17 }
```

Algorithmus zum Finden starker Komponenten

Sharir's Algorithmus findet starke Komponenten in zwei Phasen:

Algorithmus zum Finden starker Komponenten

Sharir's Algorithmus findet starke Komponenten in zwei Phasen:

1. Führe eine DFS auf G durch,

Algorithmus zum Finden starker Komponenten

Sharir's Algorithmus findet starke Komponenten in zwei Phasen:

1. Führe eine DFS auf G durch,
   - wobei alle Knoten beim Abschließen (d. h. wenn der Knoten `BLACK` gefärbt wird) auf einem Stack gespeichert werden.

Algorithmus zum Finden starker Komponenten

Sharir's Algorithmus findet starke Komponenten in zwei Phasen:

1. Führe eine DFS auf G durch,
   - wobei alle Knoten beim Abschließen (d. h. wenn der Knoten `BLACK` gefärbt wird) auf einem Stack gespeichert werden.
2. Führe eine DFS auf dem transponierten Graphen G^T durch.

Algorithmus zum Finden starker Komponenten

Sharir's Algorithmus findet starke Komponenten in zwei Phasen:

1. Führe eine DFS auf G durch,
   - wobei alle Knoten beim Abschließen (d. h. wenn der Knoten `BLACK` gefärbt wird) auf einem Stack gespeichert werden.
2. Führe eine DFS auf dem transponierten Graphen G^T durch. Dazu
   - färbe alle Knoten `WHITE` (wie üblich);

Algorithmus zum Finden starker Komponenten

Sharir's Algorithmus findet starke Komponenten in zwei Phasen:

1. Führe eine DFS auf G durch,
   - wobei alle Knoten beim Abschließen (d. h. wenn der Knoten `BLACK` gefärbt wird) auf einem Stack gespeichert werden.
2. Führe eine DFS auf dem transponierten Graphen G^T durch. Dazu
   - färbe alle Knoten `WHITE` (wie üblich);
   - beginne jeweils bei noch weißen Knoten vom (in Phase 1 erzeugten) Stack,

Algorithmus zum Finden starker Komponenten

Sharir's Algorithmus findet starke Komponenten in zwei Phasen:

1. Führe eine DFS auf G durch,
   - wobei alle Knoten beim Abschließen (d. h. wenn der Knoten `BLACK` gefärbt wird) auf einem Stack gespeichert werden.
2. Führe eine DFS auf dem transponierten Graphen G^T durch. Dazu
   - färbe alle Knoten `WHITE` (wie üblich);
   - beginne jeweils bei noch weißen Knoten vom (in Phase 1 erzeugten) Stack, d. h. Knoten auf dem Stapel, die grau oder schwarz sind, werden ignoriert, und

Algorithmus zum Finden starker Komponenten

Sharir's Algorithmus findet starke Komponenten in zwei Phasen:

1. Führe eine DFS auf G durch,
   - wobei alle Knoten beim Abschließen (d. h. wenn der Knoten `BLACK` gefärbt wird) auf einem Stack gespeichert werden.
2. Führe eine DFS auf dem transponierten Graphen G^T durch. Dazu
   - färbe alle Knoten `WHITE` (wie üblich);
   - beginne jeweils bei noch weißen Knoten vom (in Phase 1 erzeugten) Stack, d. h. Knoten auf dem Stapel, die grau oder schwarz sind, werden ignoriert, und
   - speichere den Leiter der zu Knoten v gehörenden starken Komponente.

Algorithmus zum Finden starker Komponenten

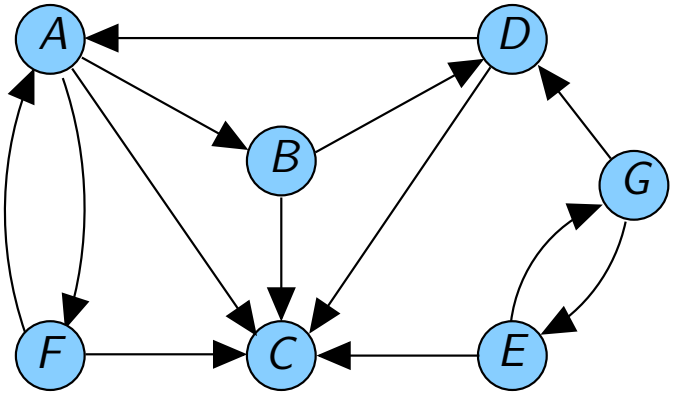
Sharir's Algorithmus findet starke Komponenten in zwei Phasen:

1. Führe eine DFS auf G durch,
   - wobei alle Knoten beim Abschließen (d. h. wenn der Knoten `BLACK` gefärbt wird) auf einem Stack gespeichert werden.
2. Führe eine DFS auf dem transponierten Graphen G^T durch. Dazu
   - färbe alle Knoten `WHITE` (wie üblich);
   - beginne jeweils bei noch weißen Knoten vom (in Phase 1 erzeugten) Stack, d. h. Knoten auf dem Stapel, die grau oder schwarz sind, werden ignoriert, und
   - speichere den Leiter der zu Knoten v gehörenden starken Komponente.

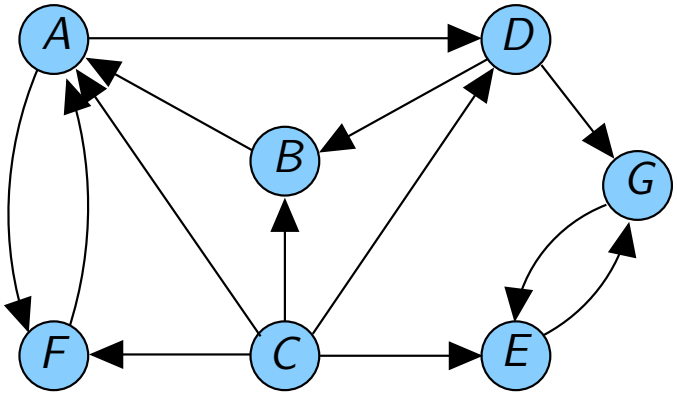
Leiter einer starken Komponente

Ein Knoten v in einer starken Komponente S_i heißt Leiter (leader), wenn er als erster Knoten bei einer DFS von S_i entdeckt wird (d.h. `GRAY` gefärbt wird).

Sharir's Algorithmus – Beispiel

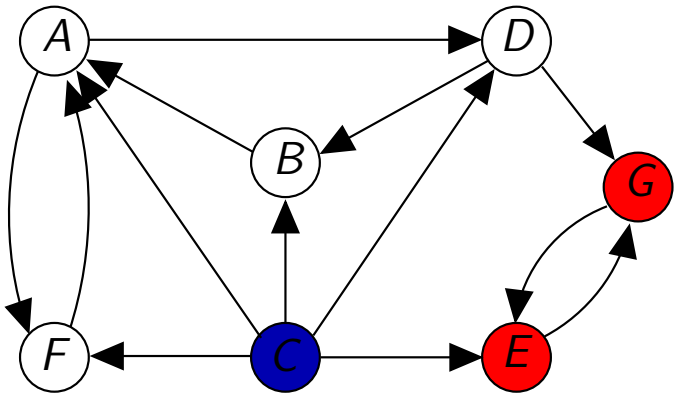


Ursprünglicher Digraph



Transponierter Graph

Stack am Ende der Phase 1



In Phase 2 gefundene starke Komponenten

Korrektheit (I)

Lemma

Sei v Leiter der starken Komponente S_i, w eine Knoten in S_j, $i \neq j$, und es existiert ein Pfad von v nach w.

Korrektheit (I)

Lemma

Sei v Leiter der starken Komponente S_i, w eine Knoten in S_j, $i \neq j$, und es existiert ein Pfad von v nach w. Es gilt: Wenn v bei einer DFS entdeckt wird (d.h. `GRAY` *gefärbt wird), dann:*

Korrektheit (I)

Lemma

Sei v Leiter der starken Komponente S_i, w eine Knoten in S_j, $i \neq j$, und es existiert ein Pfad von v nach w. Es gilt: Wenn v bei einer DFS entdeckt wird (d.h. `GRAY` *gefärbt wird), dann:*

1. *w ist* `BLACK`*, oder*
2. *es existiert ein weißer Pfad $\underbrace{v\, u_0 \ldots u_n\, w}_{\text{weiße Knoten}}$ von v nach w.*

Korrektheit (I)

Lemma

Sei v Leiter der starken Komponente S_i, w eine Knoten in S_j, $i \neq j$, und es existiert ein Pfad von v nach w. Es gilt: Wenn v bei einer DFS entdeckt wird (d.h. `GRAY` *gefärbt wird), dann:*

1. *w ist* `BLACK`*, oder*
2. *es existiert ein weißer Pfad $\underbrace{v\, u_0 \ldots u_n\, w}_{\text{weiße Knoten}}$ von v nach w.*

Beweis:

In der Vorlesung.

Korrektheit (I)

Lemma

Sei v Leiter der starken Komponente S_i, w eine Knoten in S_j, $i \neq j$, und es existiert ein Pfad von v nach w. Es gilt: Wenn v bei einer DFS entdeckt wird (d.h. `GRAY` *gefärbt wird), dann:*

1. *w ist* `BLACK`*, oder*
2. *es existiert ein weißer Pfad $\underbrace{v\, u_0 \ldots u_n\, w}_{\text{weiße Knoten}}$ von v nach w.*

Beweis:

In der Vorlesung. Beruht auf folgender Eigenschaft der Tiefensuche: Es existiert ein weißer Pfad von w nach v.

Korrektheit (I)

Lemma

Sei v Leiter der starken Komponente S_i, w eine Knoten in S_j, $i \neq j$, und es existiert ein Pfad von v nach w. Es gilt: Wenn v bei einer DFS entdeckt wird (d.h. `GRAY` *gefärbt wird), dann:*

1. *w ist* `BLACK`*, oder*
2. *es existiert ein weißer Pfad $\underbrace{v\, u_0 \ldots u_n\, w}_{\text{weiße Knoten}}$ von v nach w.*

Beweis:

In der Vorlesung. Beruht auf folgender Eigenschaft der Tiefensuche: Es existiert ein weißer Pfad von w nach v. Dann gilt: v ist Nachfolger von w in dem DFS-Baum.

Korrektheit (I)

Lemma

Sei v Leiter der starken Komponente S_i, w eine Knoten in S_j, $i \neq j$, und es existiert ein Pfad von v nach w. Es gilt: Wenn v bei einer DFS entdeckt wird (d.h. `GRAY` *gefärbt wird), dann:*

1. *w ist* `BLACK`*, oder*
2. *es existiert ein weißer Pfad $\underbrace{v\, u_0 \ldots u_n\, w}_{\text{weiße Knoten}}$ von v nach w.*

Beweis:

In der Vorlesung. Beruht auf folgender Eigenschaft der Tiefensuche: Es existiert ein weißer Pfad von w nach v. Dann gilt: v ist Nachfolger von w in dem DFS-Baum. Dies kann man durch Induktion über die Länge des weißen Pfades von w nach v beweisen.

Korrektheit (II)

Korrektheit (II)

Lemma

Jeder weißer Knoten, der in der 2. Phase vom Stapel genommen wird, ist Leiter einer starken Komponente.

Korrektheit (II)

Lemma

Jeder weißer Knoten, der in der 2. Phase vom Stapel genommen wird, ist Leiter einer starken Komponente.

Korrektheit

Korrektheit (II)

Lemma

Jeder weißer Knoten, der in der 2. Phase vom Stapel genommen wird, ist Leiter einer starken Komponente.

Korrektheit

1. Jeder in Phase 2 erzeugte DFS-Baum ist gerade eine starke Komponente.

Korrektheit (II)

Lemma

Jeder weißer Knoten, der in der 2. Phase vom Stapel genommen wird, ist Leiter einer starken Komponente.

Korrektheit

1. Jeder in Phase 2 erzeugte DFS-Baum ist gerade eine starke Komponente.
2. Alle starken Komponenten von G^T (und deswegen auch von G) werden in der 2. Phase bestimmt.

Komplexität

Komplexität

Zeitkomplexität

Die Worst-Case Zeitkomplexität von Sharir's Algorithmus zum Finden starker Komponenten in einen gerichteten Graph ist $\Theta(|V| + |E|)$.

Komplexität

Zeitkomplexität

Die Worst-Case Zeitkomplexität von Sharir's Algorithmus zum Finden starker Komponenten in einen gerichteten Graph ist $\Theta(|V| + |E|)$.
Seine Speicherkomplexität ist $\Theta(|V|)$.

Komplexität

Zeitkomplexität

Die Worst-Case Zeitkomplexität von Sharir's Algorithmus zum Finden starker Komponenten in einen gerichteten Graph ist $\Theta(|V| + |E|)$.
Seine Speicherkomplexität ist $\Theta(|V|)$.

Beweis

Komplexität

Zeitkomplexität

Die Worst-Case Zeitkomplexität von Sharir's Algorithmus zum Finden starker Komponenten in einen gerichteten Graph ist $\Theta(|V| + |E|)$.
Seine Speicherkomplexität ist $\Theta(|V|)$.

Beweis

- Die DFS über G und G^T benötigen jeweils $\Theta(|V| + |E|)$.

Komplexität

Zeitkomplexität

Die Worst-Case Zeitkomplexität von Sharir's Algorithmus zum Finden starker Komponenten in einen gerichteten Graph ist $\Theta(|V| + |E|)$.
Seine Speicherkomplexität ist $\Theta(|V|)$.

Beweis

- Die DFS über G und G^T benötigen jeweils $\Theta(|V| + |E|)$.
- Der transponierte Graph G^T kann in $\Theta(|V| + |E|)$ gebildet werden.

Komplexität

Zeitkomplexität

Die Worst-Case Zeitkomplexität von Sharir's Algorithmus zum Finden starker Komponenten in einen gerichteten Graph ist $\Theta(|V| + |E|)$.
Seine Speicherkomplexität ist $\Theta(|V|)$.

Beweis

- Die DFS über G und G^T benötigen jeweils $\Theta(|V| + |E|)$.
- Der transponierte Graph G^T kann in $\Theta(|V| + |E|)$ gebildet werden.
- Der Stack benötigt $\Theta(|V|)$ Speicher.

Übersicht

Gerichtete zykelfreie Graphen

Gerichtete zykelfreie Graphen

Gerichtete zykelfreie Graphen

Gerichtete zykelfreie Graphen (directed acyclic graph, DAG) sind eine wichtige Klasse von Graphen:

Gerichtete zykelfreie Graphen

Gerichtete zykelfreie Graphen

Gerichtete zykelfreie Graphen (directed acyclic graph, DAG) sind eine wichtige Klasse von Graphen:

- Viele Probleme lassen sich naturgemäß mit Hilfe von DAGs formulieren.

Gerichtete zykelfreie Graphen

Gerichtete zykelfreie Graphen

Gerichtete zykelfreie Graphen (directed acyclic graph, DAG) sind eine wichtige Klasse von Graphen:

- Viele Probleme lassen sich naturgemäß mit Hilfe von DAGs formulieren.
  - Scheduling: Vorranggraphen beschreiben, welche Aufgaben erledigt sein müssen, bevor ein nachfolgender Schritt beginnen kann.

Gerichtete zykelfreie Graphen

Gerichtete zykelfreie Graphen

Gerichtete zykelfreie Graphen (directed acyclic graph, DAG) sind eine wichtige Klasse von Graphen:

- Viele Probleme lassen sich naturgemäß mit Hilfe von DAGs formulieren.
  - Scheduling: Vorranggraphen beschreiben, welche Aufgaben erledigt sein müssen, bevor ein nachfolgender Schritt beginnen kann.
  - Ein Zyklus in solch einem Vorranggraphen wäre ein Deadlock.

Gerichtete zykelfreie Graphen

Gerichtete zykelfreie Graphen

Gerichtete zykelfreie Graphen (directed acyclic graph, DAG) sind eine wichtige Klasse von Graphen:

- Viele Probleme lassen sich naturgemäß mit Hilfe von DAGs formulieren.
  - Scheduling: Vorranggraphen beschreiben, welche Aufgaben erledigt sein müssen, bevor ein nachfolgender Schritt beginnen kann.
  - Ein Zyklus in solch einem Vorranggraphen wäre ein Deadlock.
- Viele Probleme haben auf DAGs eine niedrigere Komplexität als auf Digraphen.

Gerichtete zykelfreie Graphen

Gerichtete zykelfreie Graphen

Gerichtete zykelfreie Graphen (directed acyclic graph, DAG) sind eine wichtige Klasse von Graphen:

- Viele Probleme lassen sich naturgemäß mit Hilfe von DAGs formulieren.
  - Scheduling: Vorranggraphen beschreiben, welche Aufgaben erledigt sein müssen, bevor ein nachfolgender Schritt beginnen kann.
  - Ein Zyklus in solch einem Vorranggraphen wäre ein Deadlock.
- Viele Probleme haben auf DAGs eine niedrigere Komplexität als auf Digraphen.
- Ein DAG entspricht einer partiellen Ordnung $<$ auf den Knoten:
  - Eine Kante (v, w) besagt: $v < w$.

  $\Rightarrow$ Da eine partielle Ordnung anti-symmetrisch ist, kann sie keine Zykel enthalten.

Gerichtete zykelfreie Graphen

Gerichtete zykelfreie Graphen

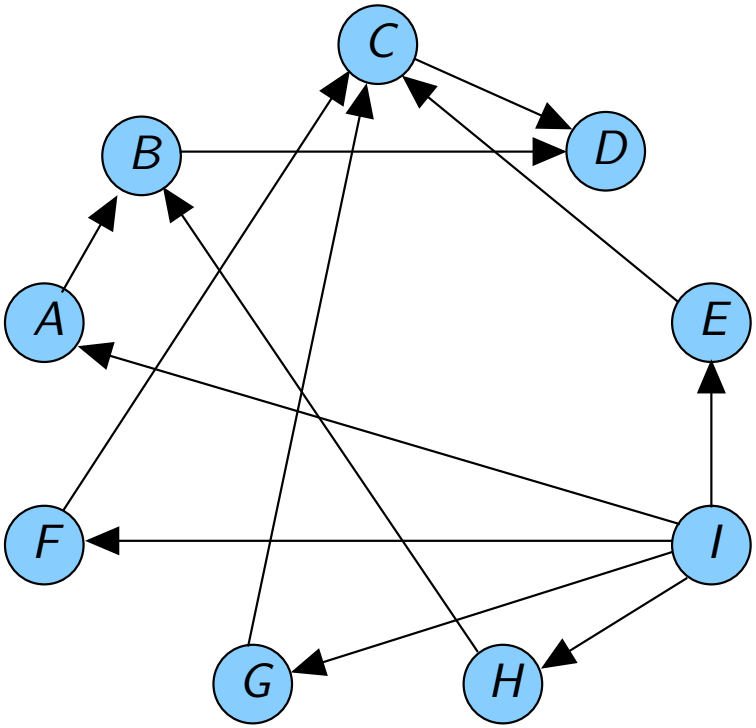
Gerichtete zykelfreie Graphen (directed acyclic graph, DAG) sind eine wichtige Klasse von Graphen:

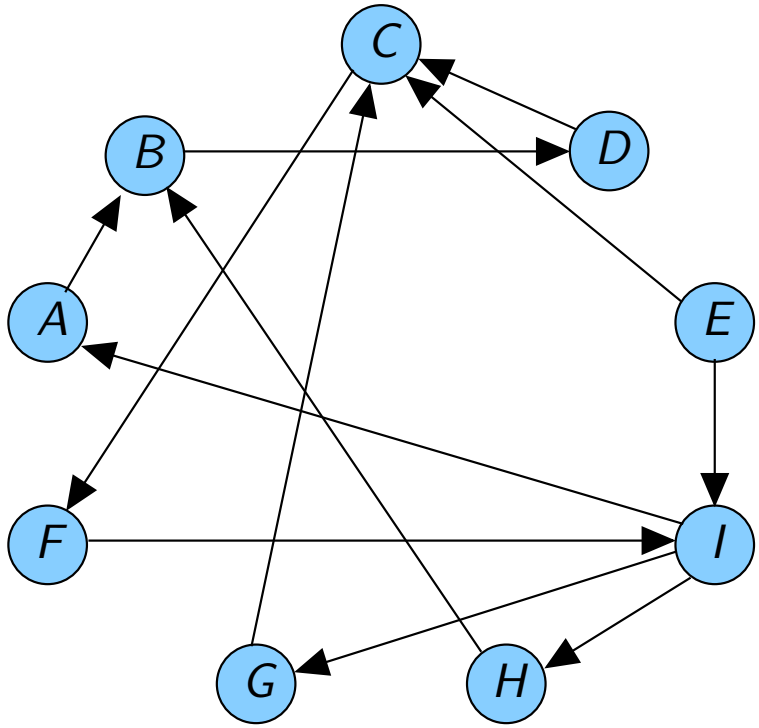
- Viele Probleme lassen sich naturgemäß mit Hilfe von DAGs formulieren.
  - Scheduling: Vorranggraphen beschreiben, welche Aufgaben erledigt sein müssen, bevor ein nachfolgender Schritt beginnen kann.
  - Ein Zyklus in solch einem Vorranggraphen wäre ein Deadlock.
- Viele Probleme haben auf DAGs eine niedrigere Komplexität als auf Digraphen.
- Ein DAG entspricht einer partiellen Ordnung $<$ auf den Knoten:
  - Eine Kante (v, w) besagt: $v < w$.

  $\Rightarrow$ Da eine partielle Ordnung anti-symmetrisch ist, kann sie keine Zykel enthalten.

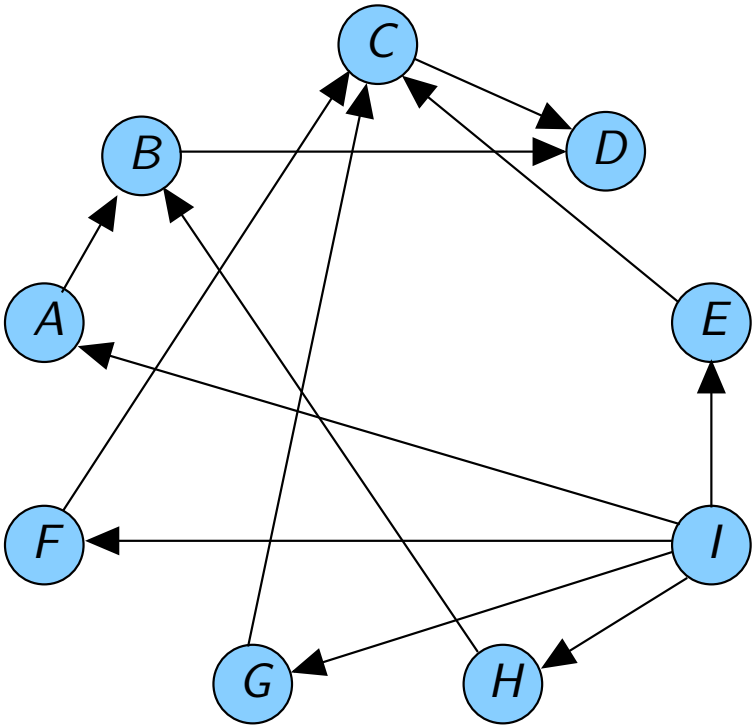
- Wir betrachten: Topologische Sortierung und Kritische-Pfad-Analyse.

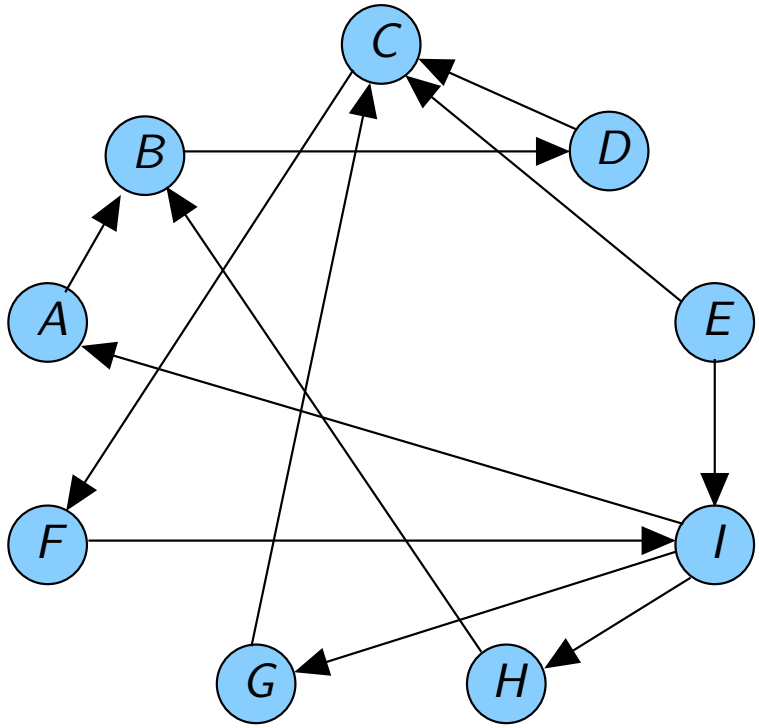
Topologische Sortierung – Motivation (I)





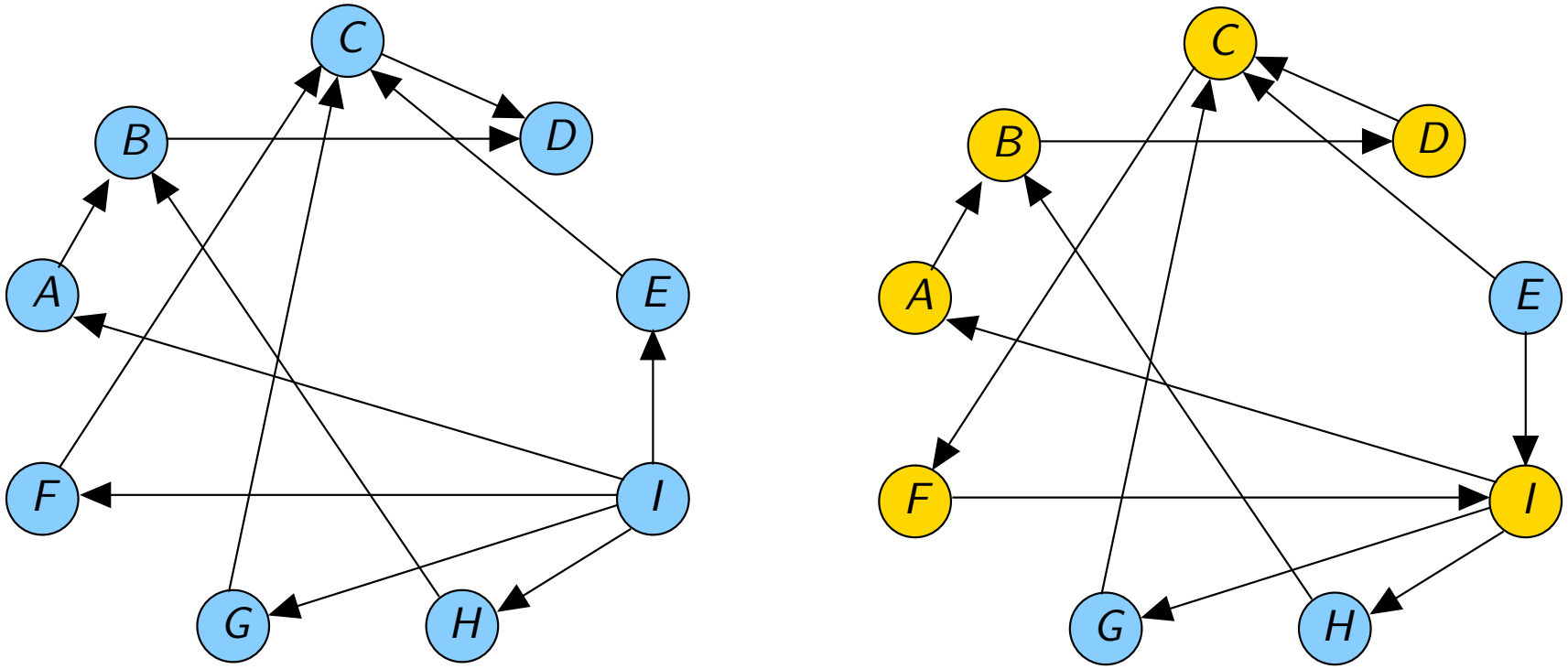
Topologische Sortierung – Motivation (I)





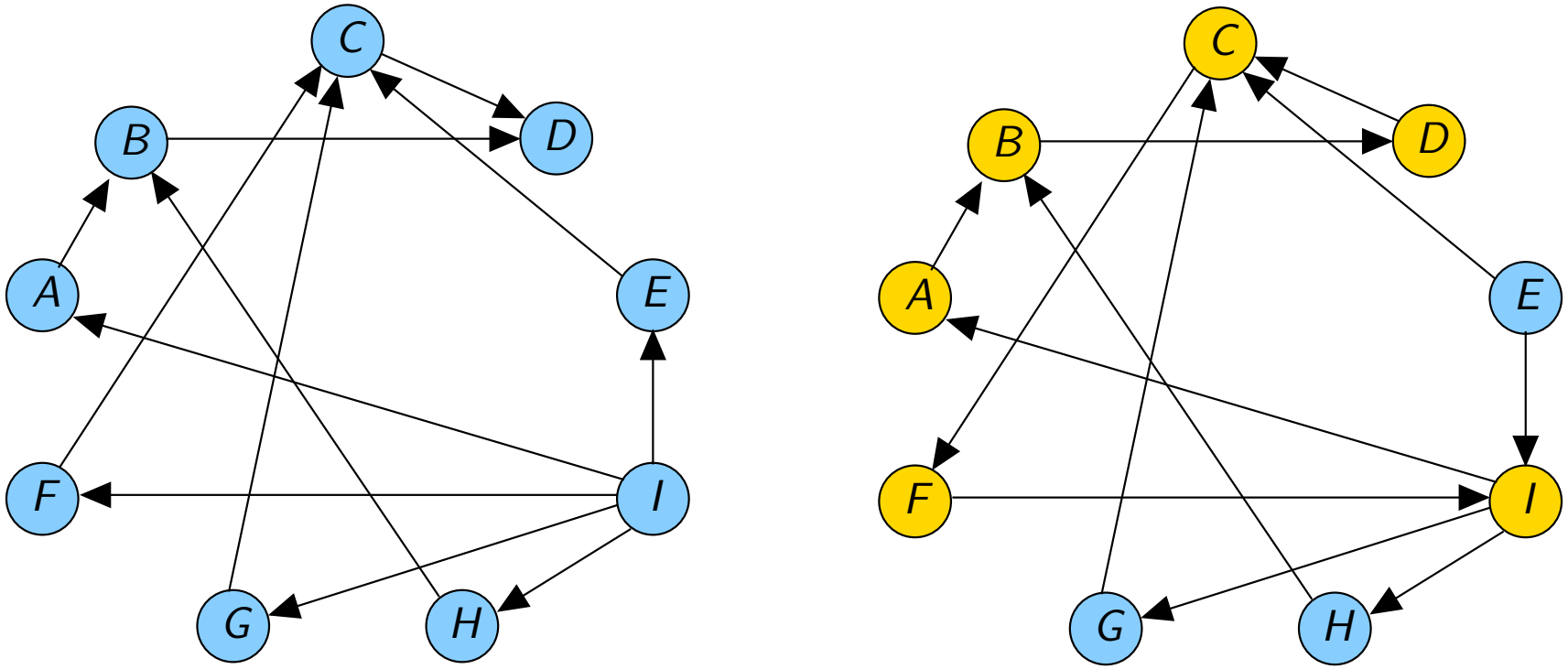
Welcher der gerichteten Graphen ist azyklisch?

Topologische Sortierung – Motivation (II)



Der rechte enthält einen Zyklus!

Topologische Sortierung – Motivation (II)



Der rechte enthält einen Zyklus!

Der linke enthält keinen Zyklus.

Topologische Ordnung

Topologische Ordnung

Topologische Ordnung

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit n Knoten. Eine topologische Ordnung von G ist eine Zuordnung $topo : V \to \{1, \ldots, n\}$, so dass:

für jede Kante $(v, w) \in E$ gilt: $topo(v) > topo(w)$.

Topologische Ordnung

Topologische Ordnung

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit n Knoten. Eine topologische Ordnung von G ist eine Zuordnung $topo : V \to \{1, \ldots, n\}$, so dass:

$$\text{für jede Kante } (v, w) \in E \text{ gilt: } topo(v) > topo(w).$$

$topo(v)$ heißt der topologische Zahl von v.

Topologische Ordnung

Topologische Ordnung

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit n Knoten. Eine topologische Ordnung von G ist eine Zuordnung $topo : V \to \{1, \ldots, n\}$, so dass:

$$\text{für jede Kante } (v, w) \in E \text{ gilt: } topo(v) > topo(w).$$

$topo(v)$ heißt der topologische Zahl von v.

Eine topologische Ordnung ist die Einbettung einer partiellen Ordnung in eine totale (d. h. lineare Ordnung).

Topologische Ordnung

Topologische Ordnung

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit n Knoten. Eine topologische Ordnung von G ist eine Zuordnung $topo : V \to \{1, \ldots, n\}$, so dass:

$$\text{für jede Kante } (v, w) \in E \text{ gilt: } topo(v) > topo(w).$$

$topo(v)$ heißt der topologische Zahl von v.

Eine topologische Ordnung ist die Einbettung einer partiellen Ordnung in eine totale (d. h. lineare Ordnung).

Lemma

Topologische Ordnung

Topologische Ordnung

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit n Knoten. Eine topologische Ordnung von G ist eine Zuordnung $topo : V \to \{1, \ldots, n\}$, so dass:

$$\text{für jede Kante } (v, w) \in E \text{ gilt: } topo(v) > topo(w).$$

$topo(v)$ heißt der topologische Zahl von v.

Eine topologische Ordnung ist die Einbettung einer partiellen Ordnung in eine totale (d. h. lineare Ordnung).

Lemma

1. *Für einen Digraph G mit einem Zyklus existiert keine topologische Ordnung.*

Topologische Ordnung

Topologische Ordnung

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit n Knoten. Eine topologische Ordnung von G ist eine Zuordnung $topo : V \to \{1, \ldots, n\}$, so dass:

$$\text{für jede Kante } (v, w) \in E \text{ gilt: } topo(v) > topo(w).$$

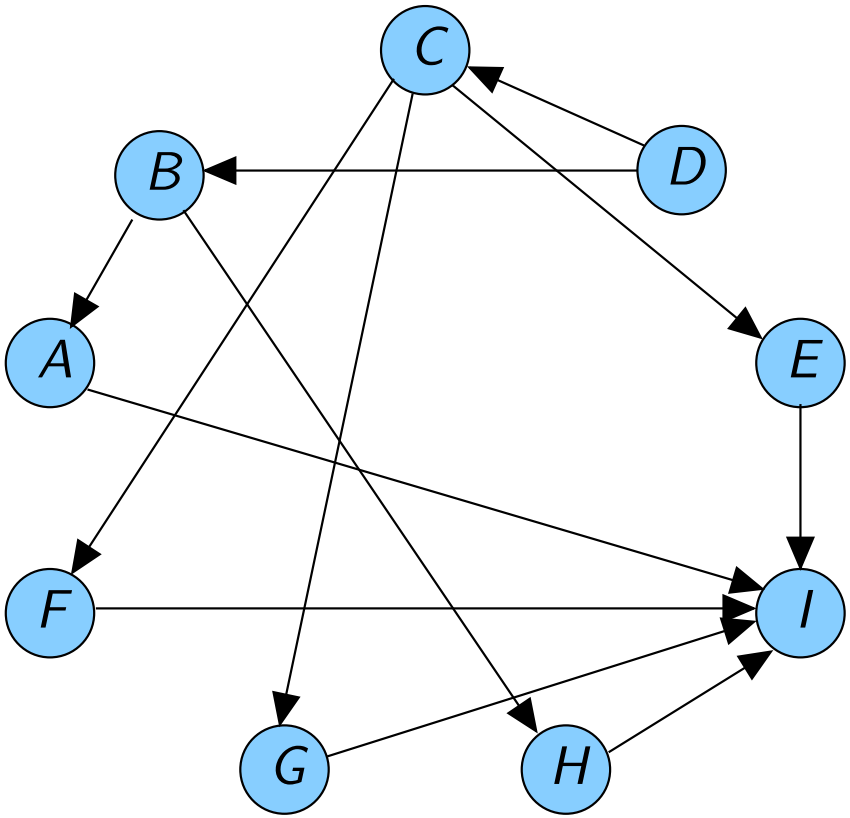
$topo(v)$ heißt der topologische Zahl von v.

Eine topologische Ordnung ist die Einbettung einer partiellen Ordnung in eine totale (d. h. lineare Ordnung).

Lemma

1. *Für einen Digraph G mit einem Zyklus existiert keine topologische Ordnung.*
2. *Jeder DAG G dagegen hat mindestens eine topologische Ordnung.*

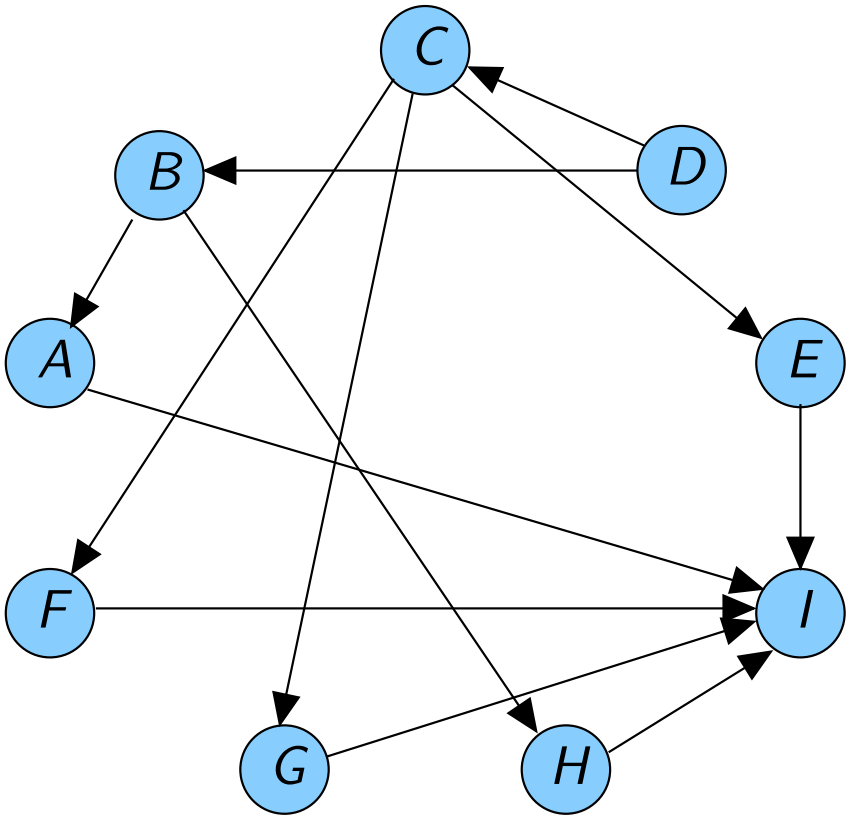
Topologische Sortierung – Beispiel



Abhängigkeitsgraph

Nr	Aufgabe	Hängt ab von
A	choose clothes	I
B	dress	A, H
C	eat breakfast	E, F, G
D	leave	B, C
E	make coffee	I
F	make toast	I
G	pour juice	I
H	shower	I
I	wake up	–

Topologische Sortierung – Beispiel



Nr	Aufgabe	Hängt ab von
A	choose clothes	I
B	dress	A, H
C	eat breakfast	E, F, G
D	leave	B, C
E	make coffee	I
F	make toast	I
G	pour juice	I
H	shower	I
I	wake up	–

Abhängigkeitsgraph

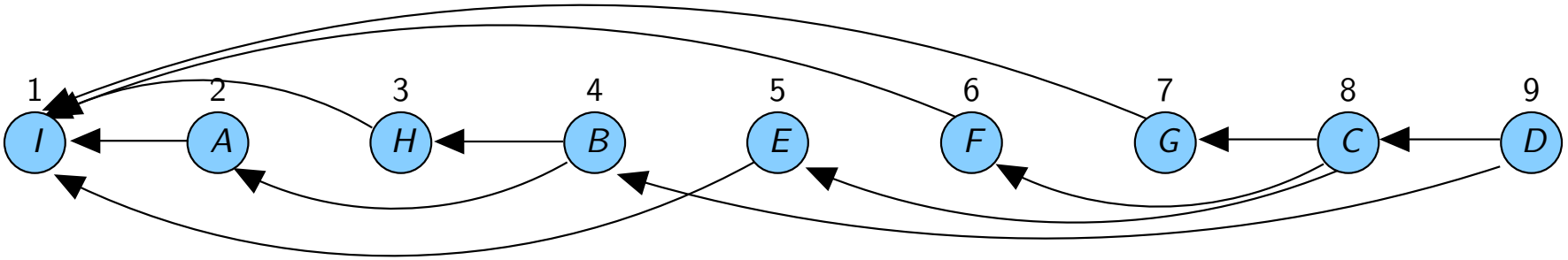
- Gibt es einen Schedule für dieses Problem? D. h. kann man eine Reihenfolge finden, um alle Aufgaben ausführen zu können?

Topologische Sortierung – Implementierung

```
1  void dfsSearch(List adjLst[n], int n, int start, int &color[n],
2                 int &topoNum, int &topo[n]) {
3    color[start] = GRAY;
4    foreach (next in adjLst[start]) {
5      // if (color[next] == GRAY) throw "Graph ist zyklisch";
6      if (color[next] == WHITE) {
7        dfsSearch(adjLst, n, next, color, topoNum, topo);
8      }
9    }
10   topo[start] = ++topoNum;
11   color[start] = BLACK;
12 }

14 // Ausgabe der topologischen Zahl von Knoten v in topo[v]
15 void topoSort(List adjLst[n], int n, int &topo[n]) {
16   int color[n] = WHITE, topoNum = 0; // vgl. connComponents()
17   for (int v = 0; v < n; v++)
18     if (color[v] == WHITE)
19       dfsSearch(adjLst, n, v, color, topoNum, topo);
20 }
```

Topologische Sortierung – Ergebnis



Abhängigkeitsgraph, der topologischen Ordnung entsprechend gezeichnet.

Korrektheit

Korrektheit

Theorem

Der Algorithmus terminiert, und wenn er terminiert enthält das Array `topo` eine topologische Ordnung von G.

Korrektheit

Theorem

Der Algorithmus terminiert, und wenn er terminiert enthält das Array `topo` eine topologische Ordnung von G.

Beweis:

Korrektheit

Theorem

Der Algorithmus terminiert, und wenn er terminiert enthält das Array `topo` eine topologische Ordnung von G.

Beweis:

1. Die DFS besucht jeden Knoten, daher sind die Zahlen in dem Array `topo` alle verschieden im Bereich 1 bis N.

Korrektheit

Theorem

Der Algorithmus terminiert, und wenn er terminiert enthält das Array `topo` eine topologische Ordnung von G.

Beweis:

1. Die DFS besucht jeden Knoten, daher sind die Zahlen in dem Array `topo` alle verschieden im Bereich 1 bis N.
2. Sei $(v, w) \in E$.

Korrektheit

Theorem

Der Algorithmus terminiert, und wenn er terminiert enthält das Array `topo` eine topologische Ordnung von G.

Beweis:

1. Die DFS besucht jeden Knoten, daher sind die Zahlen in dem Array `topo` alle verschieden im Bereich 1 bis N.
2. Sei $(v, w) \in E$. w ist kein Vorgänger im DFS-Baum, sonst wäre G nicht azyklisch.

Korrektheit

Theorem

Der Algorithmus terminiert, und wenn er terminiert enthält das Array `topo` eine topologische Ordnung von G.

Beweis:

1. Die DFS besucht jeden Knoten, daher sind die Zahlen in dem Array `topo` alle verschieden im Bereich 1 bis N.
2. Sei $(v, w) \in E$. w ist kein Vorgänger im DFS-Baum, sonst wäre G nicht azyklisch. Damit folgt, dass w `BLACK` ist, wenn `topo[v]` ein Wert zugewiesen wird.

Korrektheit

Theorem

Der Algorithmus terminiert, und wenn er terminiert enthält das Array `topo` eine topologische Ordnung von G.

Beweis:

1. Die DFS besucht jeden Knoten, daher sind die Zahlen in dem Array `topo` alle verschieden im Bereich 1 bis N.
2. Sei $(v, w) \in E$. w ist kein Vorgänger im DFS-Baum, sonst wäre G nicht azyklisch. Damit folgt, dass w `BLACK` ist, wenn `topo[v]` ein Wert zugewiesen wird. Also wurde `topo[w]` schon vorher ein Wert zugewiesen.

Korrektheit

Theorem

Der Algorithmus terminiert, und wenn er terminiert enthält das Array `topo` eine topologische Ordnung von G.

Beweis:

1. Die DFS besucht jeden Knoten, daher sind die Zahlen in dem Array `topo` alle verschieden im Bereich 1 bis N.
2. Sei $(v, w) \in E$. w ist kein Vorgänger im DFS-Baum, sonst wäre G nicht azyklisch. Damit folgt, dass w `BLACK` ist, wenn `topo[v]` ein Wert zugewiesen wird. Also wurde `topo[w]` schon vorher ein Wert zugewiesen. Da `topoNum` immer größer wird, folgt `topo[v]` $>$ `topo[w]`.

Komplexität

Zeitkomplexität

Eine topologische Ordnung kann in $\Theta(|V| + |E|)$ bestimmt werden.

Gewichtete Graphen

Knotengewichteter Graph

Ein knotengewichteter Graph G ist ein Tripel (V, E, W), wobei:

- (V, E) ein – gerichteter oder ungerichteter – Graph ist, und
- $W : V \longrightarrow \mathbb{R}$ die Gewichtsfunktion.
  $W(v)$ ist das Gewicht des Knotens v.

Gewichtete Graphen

Knotengewichteter Graph

Ein knotengewichteter Graph G ist ein Tripel (V, E, W), wobei:

- (V, E) ein – gerichteter oder ungerichteter – Graph ist, und
- $W : V \longrightarrow \mathbb{R}$ die Gewichtsfunktion.
  $W(v)$ ist das Gewicht des Knotens v.

Kantengewichteter Graph

Ein (kanten-)gewichteter Graph G ist ein Tripel (V, E, W), wobei:

- (V, E) ein – gerichteter oder ungerichteter – Graph ist, und
- $W : E \longrightarrow \mathbb{R}$ Gewichtsfunktion. $W(e)$ ist das Gewicht der Kante e.

Gewichtete Graphen

Knotengewichteter Graph

Ein knotengewichteter Graph G ist ein Tripel (V, E, W), wobei:

- (V, E) ein – gerichteter oder ungerichteter – Graph ist, und
- $W : V \longrightarrow \mathbb{R}$ die Gewichtsfunktion.
  $W(v)$ ist das Gewicht des Knotens v.

Kantengewichteter Graph

Ein (kanten-)gewichteter Graph G ist ein Tripel (V, E, W), wobei:

- (V, E) ein – gerichteter oder ungerichteter – Graph ist, und
- $W : E \longrightarrow \mathbb{R}$ Gewichtsfunktion. $W(e)$ ist das Gewicht der Kante e.

- Ein knotengewichteter Graph (V, E, W) lässt sich in einen kantengewichteten Graphen (V, E, W') überführen, indem *alle* von einem Knoten v ausgehenden Kanten $e = (v, \cdot) \in E$ das Gewicht $W'(e) = W(v)$ erhalten.

Gewichtete Graphen – Darstellung (I)

Gewichtete Graphen werden ebenso als Adjazenzlisten oder Adjazenzmatrix dargestellt:

Gewichtete Graphen – Darstellung (I)

Gewichtete Graphen werden ebenso als Adjazenzlisten oder Adjazenzmatrix dargestellt:

- Bei knotengewichteten Graphen wird die Zusatzinformation zu den Knoten üblicherweise in einem weiteren Array gespeichert – vgl. `int color[n];` bei BFS oder DFS.

Gewichtete Graphen – Darstellung (I)

Gewichtete Graphen werden ebenso als Adjazenzlisten oder Adjazenzmatrix dargestellt:

- Bei knotengewichteten Graphen wird die Zusatzinformation zu den Knoten üblicherweise in einem weiteren Array gespeichert – vgl. `int color[n];` bei BFS oder DFS.
- Kantengewichte können bei der Adjazenzmatrixdarstellung direkt in der Matrix gespeichert werden.

Gewichtete Graphen – Darstellung (I)

Gewichtete Graphen werden ebenso als Adjazenzlisten oder Adjazenzmatrix dargestellt:

- Bei knotengewichteten Graphen wird die Zusatzinformation zu den Knoten üblicherweise in einem weiteren Array gespeichert – vgl. `int color[n];` bei BFS oder DFS.
- Kantengewichte können bei der Adjazenzmatrixdarstellung direkt in der Matrix gespeichert werden.
  Ein besonderer Wert, etwa ∞ besagt, dass keine Kante existiert.

Gewichtete Graphen – Darstellung (II)

- Bei der Adjazenzlistendarstellung von kantengewichteten Graphen wird das Gewicht jeweils mit in der Liste gespeichert:

Gewichtete Graphen – Darstellung (II)

- Bei der Adjazenzlistendarstellung von kantengewichteten Graphen wird das Gewicht jeweils mit in der Liste gespeichert:

Beispiel (Kantengewichteter Graph als Adjazenzlisten)

```
1  // bisher (ohne Gewichte):
2  List adjList[n]; // wobei List im Grunde "List<int>" war, also:
3  List<int> adjList[n];

5  // neu (mit Gewichten):
6  struct Edge {
7    int w;
8    float weight;
9  }
10 List<Edge> adjList[n];
11 // wir verwenden aber weiterhin die Kurzschreibweise:
12 List adjList[n]; // ggf. mit Gewichten
```

Das Kritische-Pfad-Problem – Einführung

Das Kritische-Pfad-Problem – Einführung

Das Gewicht eines Pfades ist die Summe der Kantengewichten der besuchten Kanten, oder die Summe der Knotengewichte der besuchten Knoten.

Das Kritische-Pfad-Problem – Einführung

Das Gewicht eines Pfades ist die Summe der Kantengewichten der besuchten Kanten, oder die Summe der Knotengewichte der besuchten Knoten.

Kritischer-Pfad-Problem

Finde den längsten Pfad (bezogen auf das Gesamtgewicht) in einem (kanten- oder knoten-)gewichteten DAG.

Das Kritische-Pfad-Problem – Einführung

Das Gewicht eines Pfades ist die Summe der Kantengewichten der besuchten Kanten, oder die Summe der Knotengewichte der besuchten Knoten.

Kritischer-Pfad-Problem

Finde den längsten Pfad (bezogen auf das Gesamtgewicht) in einem (kanten- oder knoten-)gewichteten DAG.

- Wir betrachten hier *nur* knotengewichtete DAGs.

Das Kritische-Pfad-Problem – Einführung

Das Gewicht eines Pfades ist die Summe der Kantengewichten der besuchten Kanten, oder die Summe der Knotengewichte der besuchten Knoten.

Kritischer-Pfad-Problem

Finde den längsten Pfad (bezogen auf das Gesamtgewicht) in einem (kanten- oder knoten-)gewichteten DAG.

- Wir betrachten hier *nur* knotengewichtete DAGs.

Beispiel (Anwendung)

Wie lange benötigt man für die Ausführung der bereits vorgestellten Aufgaben mindestens, wenn für jede Aufgabe eine Dauer gegeben ist und unabhängige Aufgaben gleichzeitig erledigt werden können?

Das Kritische-Pfad-Problem – Anwendung

Das Kritische-Pfad-Problem – Anwendung

Früheste Startzeit- und Endzeitpunkt

Finde den frühestmöglichen Beendigungszeitpunkt (earliest finish time) für eine Menge voneinander abhängiger Aufgaben.

Das Kritische-Pfad-Problem – Anwendung

Früheste Startzeit- und Endzeitpunkt

Finde den frühestmöglichen Beendigungszeitpunkt (earliest finish time) für eine Menge voneinander abhängiger Aufgaben.

- Jede Aufgabe hat eine (nicht-negative) Dauer.

Das Kritische-Pfad-Problem – Anwendung

Früheste Startzeit- und Endzeitpunkt

Finde den frühestmöglichen Beendigungszeitpunkt (earliest finish time) für eine Menge voneinander abhängiger Aufgaben.

- Jede Aufgabe hat eine (nicht-negative) Dauer.
- Der früheste Startzeitpunkt (earliest start time) für Aufgabe v ($est(v)$) ist 0 wenn v keine Abhängigkeiten hat;

Das Kritische-Pfad-Problem – Anwendung

Früheste Startzeit- und Endzeitpunkt

Finde den frühestmöglichen Beendigungszeitpunkt (earliest finish time) für eine Menge voneinander abhängiger Aufgaben.

- Jede Aufgabe hat eine (nicht-negative) Dauer.
- Der früheste Startzeitpunkt (earliest start time) für Aufgabe v ($est(v)$) ist 0 wenn v keine Abhängigkeiten hat; andernfalls:
- $est(v)$ ist das Maximum der frühesten Endzeitpunkte seiner Abhängigkeiten.

Das Kritische-Pfad-Problem – Anwendung

Früheste Startzeit- und Endzeitpunkt

Finde den frühestmöglichen Beendigungszeitpunkt (earliest finish time) für eine Menge voneinander abhängiger Aufgaben.

- Jede Aufgabe hat eine (nicht-negative) Dauer.
- Der früheste Startzeitpunkt (earliest start time) für Aufgabe v ($est(v)$) ist 0 wenn v keine Abhängigkeiten hat; andernfalls:
- $est(v)$ ist das Maximum der frühesten Endzeitpunkte seiner Abhängigkeiten.

Der früheste Endzeitpunkt (earliest finish time) für Aufgabe v ($eft(v)$) ist gleich $est(v)$ plus der Dauer von v.

Das Kritische-Pfad-Problem – Anwendung

Das Kritische-Pfad-Problem – Anwendung

Kritische Pfad

Der kritische Pfad ist eine Folge von Aufgaben $v_0, \ldots, v_k$, so dass

Das Kritische-Pfad-Problem – Anwendung

Kritische Pfad

Der kritische Pfad ist eine Folge von Aufgaben $v_0, \ldots, v_k$, so dass

- v_0 keine Abhängigkeiten hat.

Das Kritische-Pfad-Problem – Anwendung

Kritische Pfad

Der kritische Pfad ist eine Folge von Aufgaben $v_0, \ldots, v_k$, so dass

- v_0 keine Abhängigkeiten hat.
- v_i abhängig von v_{i-1} ist, wobei $est(v_i) = eft(v_{i-1})$ (kein Schlupf).

Das Kritische-Pfad-Problem – Anwendung

Kritische Pfad

Der kritische Pfad ist eine Folge von Aufgaben $v_0, \ldots, v_k$, so dass

- v_0 keine Abhängigkeiten hat.
- v_i abhängig von v_{i-1} ist, wobei $est(v_i) = eft(v_{i-1})$ (kein Schlupf).
- $eft(v_k)$ das Maximum über alle Aufgaben ergibt.

Das Kritische-Pfad-Problem – Anwendung

Kritische Pfad

Der kritische Pfad ist eine Folge von Aufgaben $v_0, \ldots, v_k$, so dass

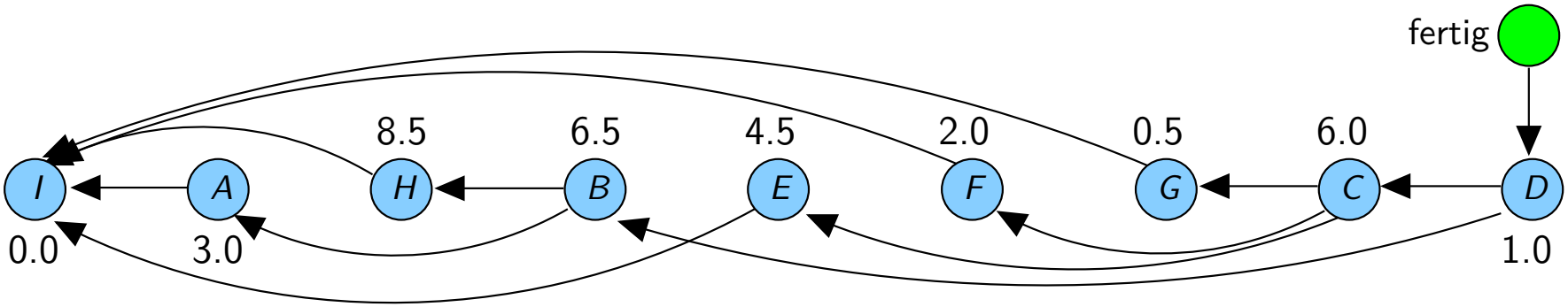
- v_0 keine Abhängigkeiten hat.
- v_i abhängig von v_{i-1} ist, wobei $est(v_i) = eft(v_{i-1})$ (kein Schlupf).
- $eft(v_k)$ das Maximum über alle Aufgaben ergibt.

Es gibt eine kritische Abhängigkeit zwischen v_{i-1} und v_i, d.h. eine Verzögerung in v_{i-1} führt zu einer Verzögerung in v_i.

Kritische-Pfad-Analyse – Program

```
1  // Knotengewichte in duration. Aufruf analog zu
       connComponents()
2  // Ausgabe: eft, kritischer Pfad als Vorgängerliste in critDep
3  void dfsSearch(List adjL[n], int n, int start, int &color[n],
4                 int duration[n], int &critDep[n], int &eft[n]) {
5    int est = 0;
6    color[start] = GRAY;
7    critDep[start] = -1;
8    foreach (next in adjL[start]) {
9      if (color[next] == WHITE) {
10       dfsSearch(adjL, n, next, color, duration, critDep, eft);
11     }
12     if (eft[next] >= est) {
13       est = eft[next];
14       critDep[start] = next;
15     }
16   }
17   eft[start] = est + duration[start];
18   color[start] = BLACK;
19 }
```

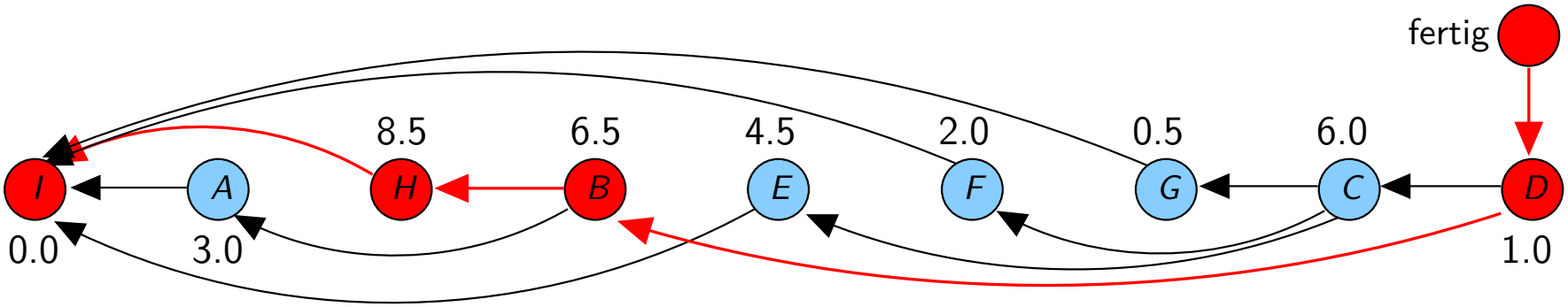
Kritische-Pfad-Analyse – Beispiel



I	A	H	B	E	F	G	C	D
wake up	choose clothes	shower	dress	make coffee	make toast	pour juice	eat breakf	leave
0.0	3.0	8.5	6.5	4.5	2.0	0.5	6.0	1.0

Dauer

Kritische-Pfad-Analyse – Beispiel



I	A	H	B	E	F	G	C	D
wake up	choose clothes	shower	dress	make coffee	make toast	pour juice	eat breakf	leave
0.0	3.0	8.5	6.5	4.5	2.0	0.5	6.0	1.0

Dauer

- $eft = 1 + 6.5 + 8.5 + 0 = 16.$