Datenstrukturen und Algorithmen

Vorlesung 19: Maximaler Fluss

Joost-Pieter Katoen

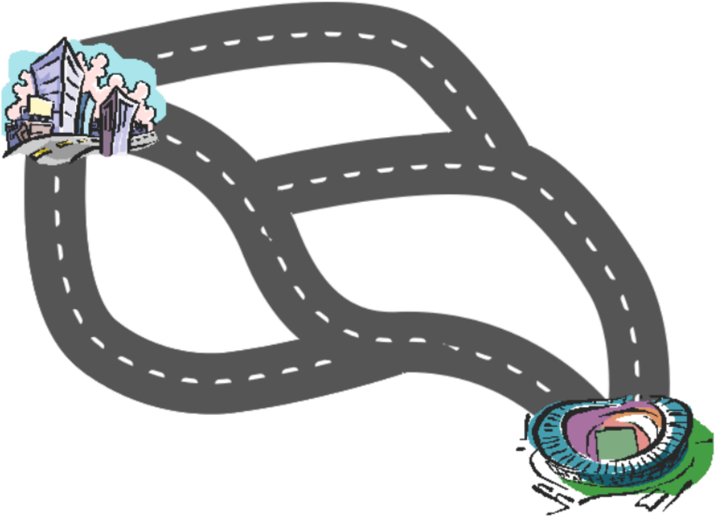
Lehrstuhl für Informatik 2
Software Modeling and Verification Group

http://www-i2.informatik.rwth-aachen.de/i2/dsal12/

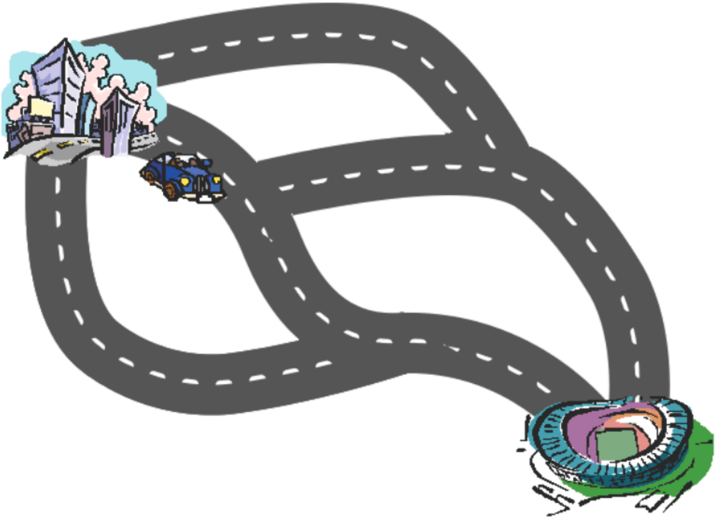
29. Juni 2012

Übersicht

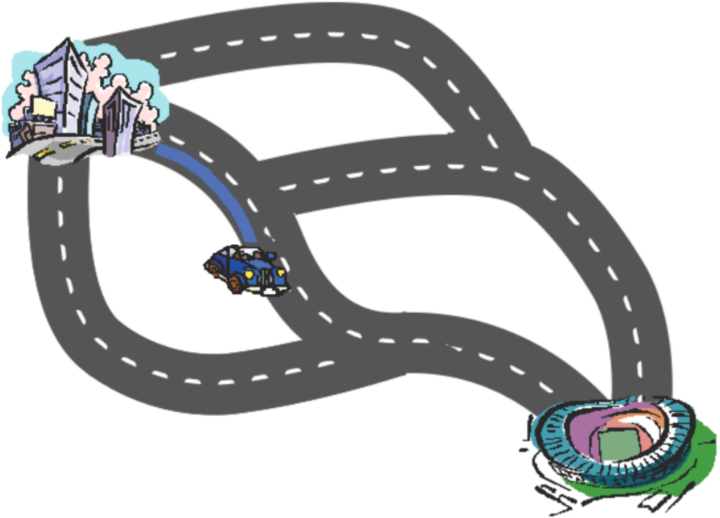
Graphenproblem: maximale Flüsse



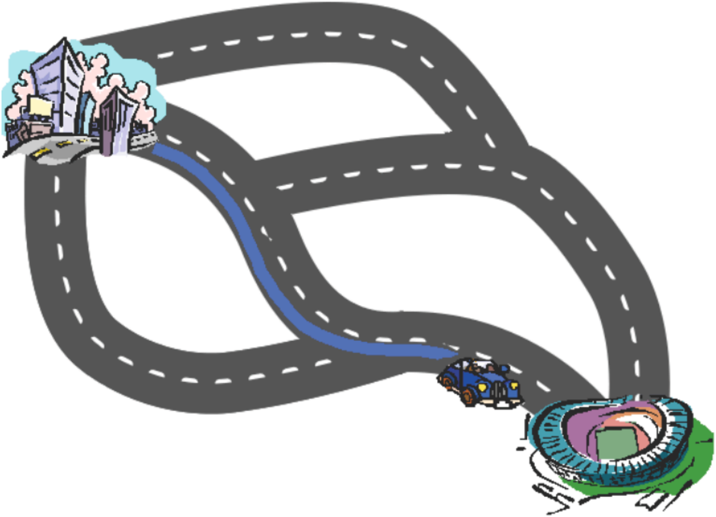
Graphenproblem: maximale Flüsse



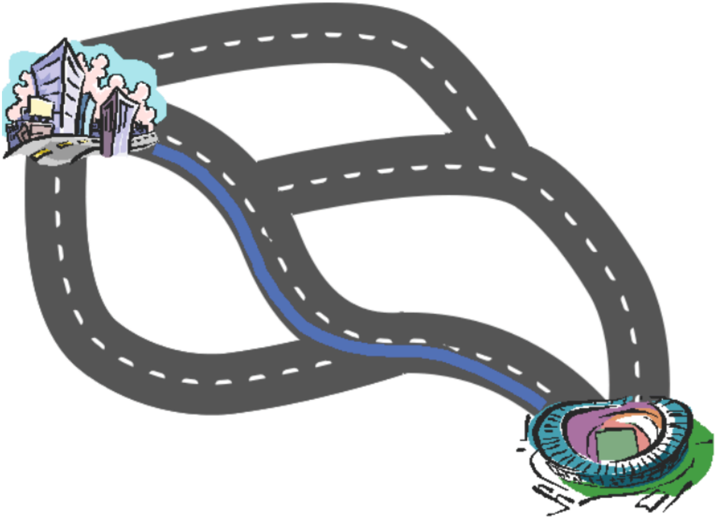
Graphenproblem: maximale Flüsse



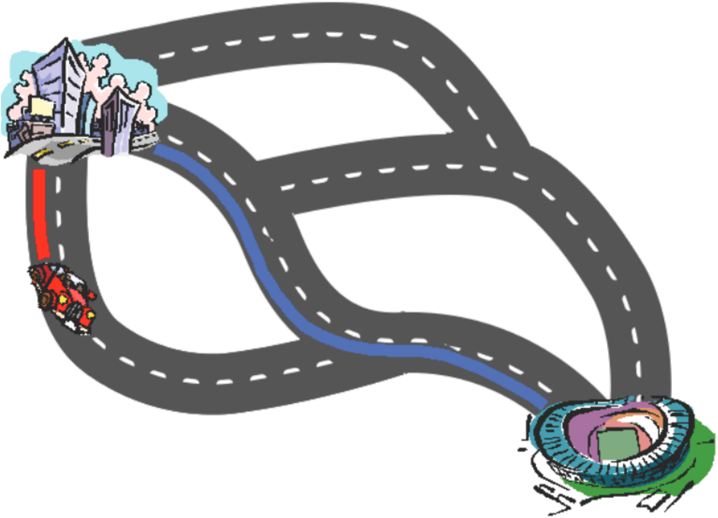
Graphenproblem: maximale Flüsse



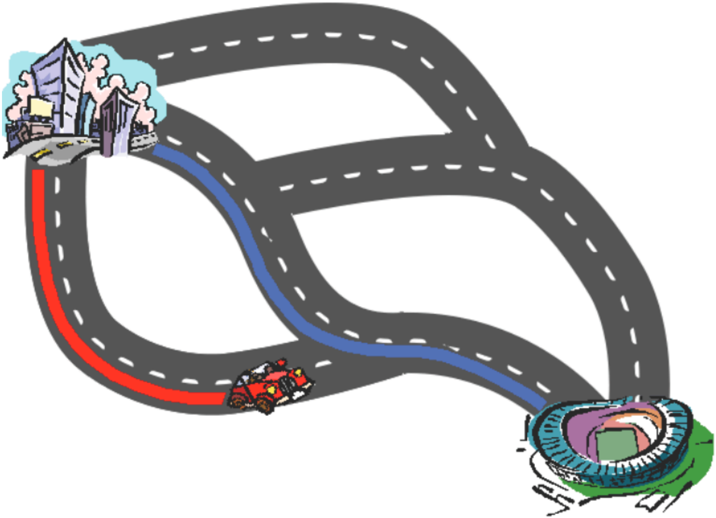
Graphenproblem: maximale Flüsse



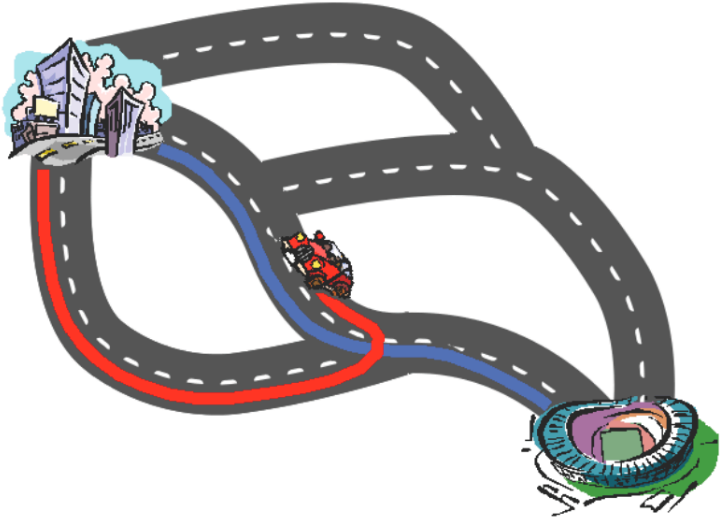
Graphenproblem: maximale Flüsse



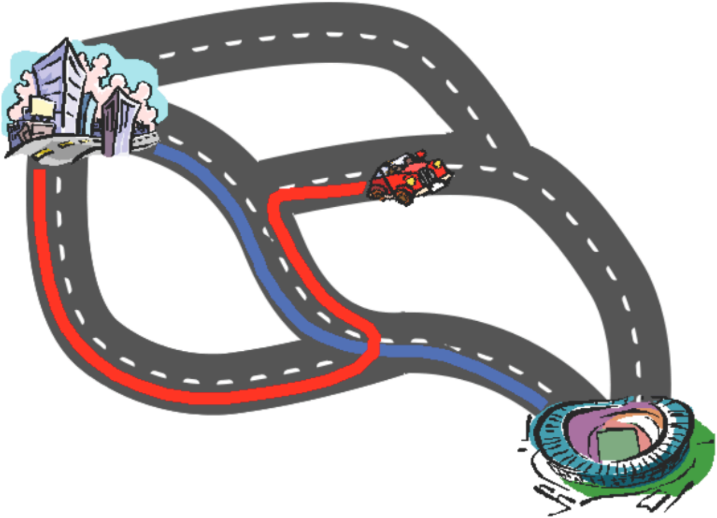
Graphenproblem: maximale Flüsse



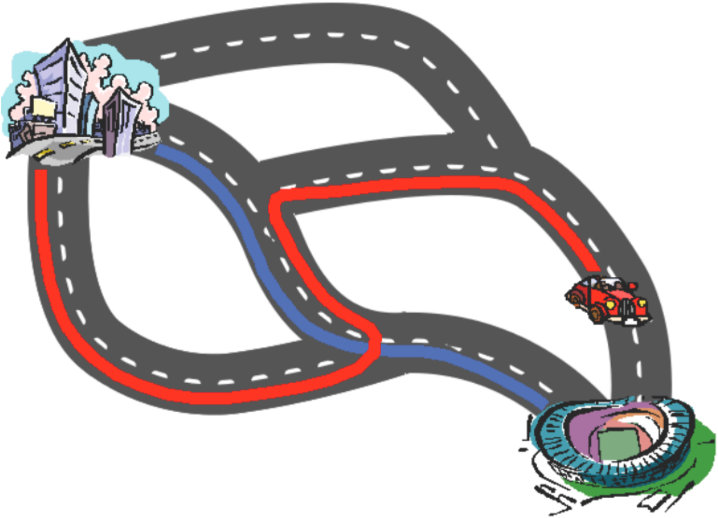
Graphenproblem: maximale Flüsse



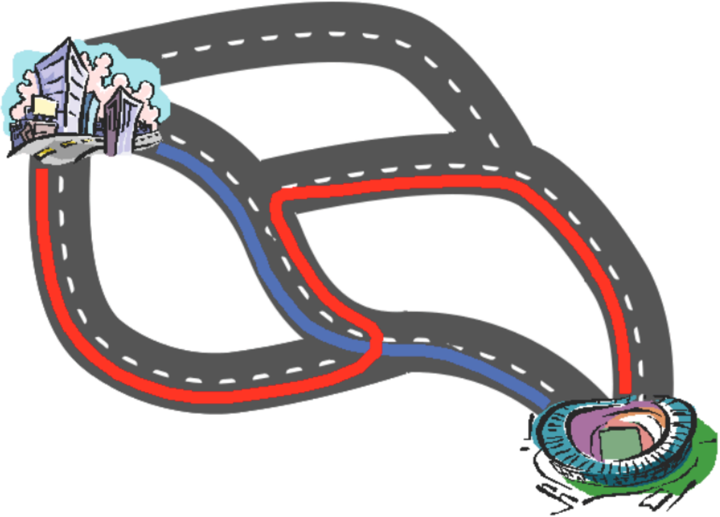
Graphenproblem: maximale Flüsse



Graphenproblem: maximale Flüsse



Graphenproblem: maximale Flüsse



Graphenproblem: maximale Flüsse

Beispiel (maximale Flüsse)

Eingabe:
1. Eine Straßenkarte, auf der die Kapazität der Straßen eingezeichnet ist,
2. eine Quelle, und
3. eine Senke.

Ausgabe: Die maximale Rate, mit der Material (= Zuschauer) von der Quelle bis zur Senke (= Stadion) transportiert werden kann, ohne die Kapazitätsbeschränkungen der Straßen zu verletzen.

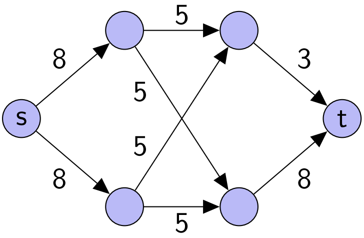
Übersicht

Flussnetzwerk

Flussnetzwerk

Ein Flussnetzwerk $G = (V, E, c)$ ist ein digraph (V, E) mit

- $c : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ die Kapazitätsfunktion sodaß:
  - $(u, v) \in E$ dann $c(u, v) \geqslant 0$
  - $(u, v) \notin E$ dann $c(u, v) = 0$
- $s, t \in V$, die Quelle s und Senke t des Flussnetzwerkes
- Jeder Knoten $v \in V$ liegt auf einem Pfad von Quelle s zur Senke t

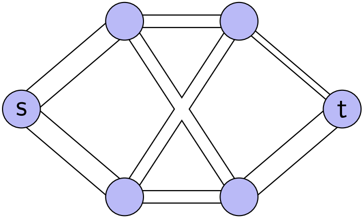


Flussnetzwerk

Flussnetzwerk

Ein Flussnetzwerk $G = (V, E, c)$ ist ein digraph (V, E) mit

- $c : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ die Kapazitätsfunktion sodaß:
  - $(u, v) \in E$ dann $c(u, v) \geqslant 0$
  - $(u, v) \notin E$ dann $c(u, v) = 0$
- $s, t \in V$, die Quelle s und Senke t des Flussnetzwerkes
- Jeder Knoten $v \in V$ liegt auf einem Pfad von Quelle s zur Senke t



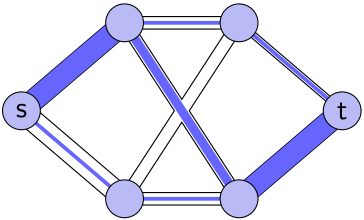
- An der Quelle wird produziert
- An der Senke wird verbraucht
- Kanten sind wie Wasserrohre
- Kapazität = maximale Durchsatzrate

Flussnetzwerk

Flussnetzwerk

Ein Flussnetzwerk $G = (V, E, c)$ ist ein digraph (V, E) mit

- $c : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ die Kapazitätsfunktion sodaß:
  - $(u, v) \in E$ dann $c(u, v) \geqslant 0$
  - $(u, v) \notin E$ dann $c(u, v) = 0$
- $s, t \in V$, die Quelle s und Senke t des Flussnetzwerkes
- Jeder Knoten $v \in V$ liegt auf einem Pfad von Quelle s zur Senke t



- An der Quelle wird produziert
- An der Senke wird verbraucht
- Kanten sind wie Wasserrohre
- Kapazität = maximale Durchsatzrate

Fluss in einem Flussnetzwerk

Definition (Fluss)

Ein Fluss ist eine Funktion $f : V \times V \to \mathbb{R}$, mit folgenden Eigenschaften:

- Beschränkung: Für $u, v \in V$ gilt $f(u, v) \leqslant c(u, v)$.
- Asymmetrie: Für $u, v \in V$ gilt $f(u, v) = -f(v, u)$.
- Flusserhaltung: Für $u \in V - \{s, t\}$ gilt: $\sum_{v \in V} f(u, v) = 0$.

$f(u, v)$ ist der Fluss vom Knoten u zum Knoten v.

Fluss in einem Flussnetzwerk

Definition (Fluss)

Ein Fluss ist eine Funktion $f \colon V \times V \to \mathbb{R}$, mit folgenden Eigenschaften:

- Beschränkung: Für $u, v \in V$ gilt $f(u, v) \leqslant c(u, v)$.
- Asymmetrie: Für $u, v \in V$ gilt $f(u, v) = -f(v, u)$.
- Flusserhaltung: Für $u \in V - \{s, t\}$ gilt: $\sum\limits_{v \in V} f(u, v) = 0$.

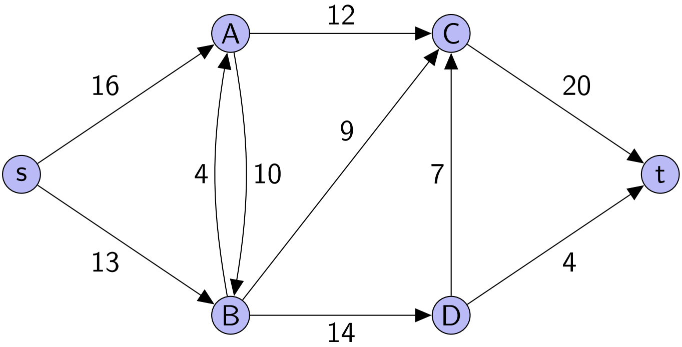
$f(u, v)$ ist der Fluss vom Knoten u zum Knoten v.

Definition (Wert eines Flusses)

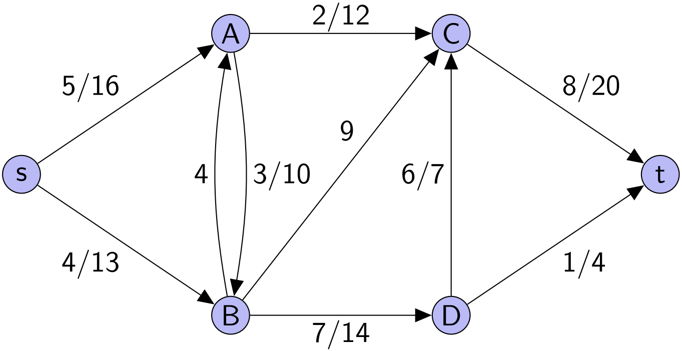
Der Wert $|f|$ des Flusses f ist der Gesamtfluss aus der Quelle s:

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v).$$

Darstellung von Flüssen

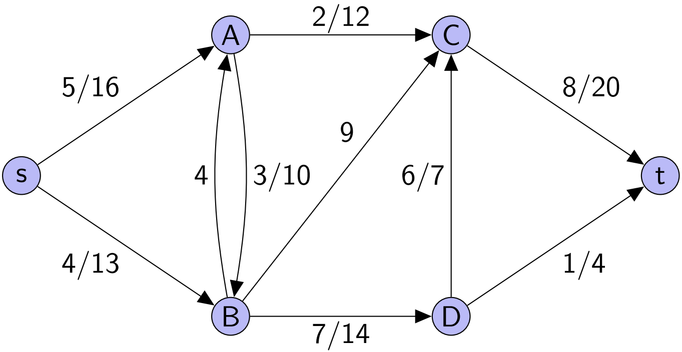


Darstellung von Flüssen



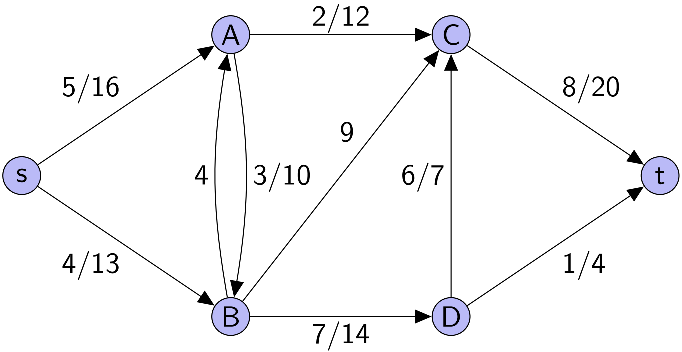
- Wir beschriften Kanten mit $f(u,v)/c(u,v)$, falls $f(u,v) > 0$.

Darstellung von Flüssen



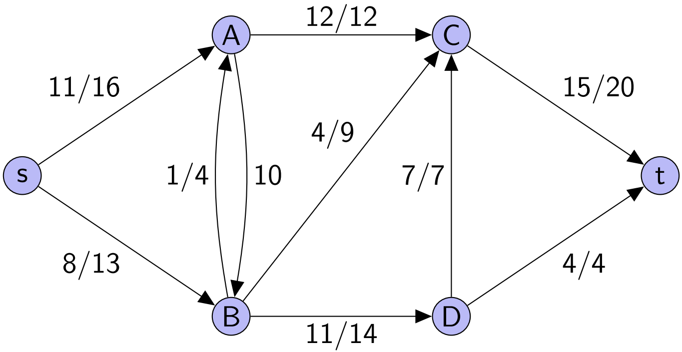
- Wir beschriften Kanten mit $f(u,v)/c(u,v)$, falls $f(u,v) > 0$.
- Negative Flüsse $f(u,v) < 0$ werden nicht explizit angegeben.

Darstellung von Flüssen



- Wir beschriften Kanten mit $f(u, v)/c(u, v)$, falls $f(u, v) > 0$.
- Negative Flüsse $f(u, v) < 0$ werden nicht explizit angegeben.
- Der eingezeichnete Fluss f hat den Wert $|f| = 5+4 = 9$.

Darstellung von Flüssen



- Wir beschriften Kanten mit $f(u, v)/c(u, v)$, falls $f(u, v) > 0$.
- Negative Flüsse $f(u, v) < 0$ werden nicht explizit angegeben.
- Der eingezeichnete Fluss f hat den Wert $|f| = 5+4 = 9$.
- Der alternative Fluss f' hat den Wert $|f'| = 11+8 = 19$.

Maximale Flüsse

Ein maximaler Fluss ist einen Fluss mit maximalem Wert.

Maximale Flüsse

Ein maximaler Fluss ist einen Fluss mit maximalem Wert.

Problem (Maximaler Fluss)

Finde einen maximalen Fluss in einem gegebenen Flussnetzwerk G.

Maximale Flüsse

Ein maximaler Fluss ist einen Fluss mit maximalem Wert.

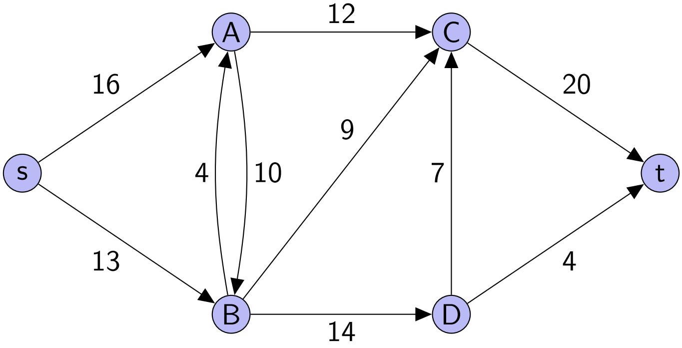
Problem (Maximaler Fluss)

Finde einen maximalen Fluss in einem gegebenen Flussnetzwerk G.

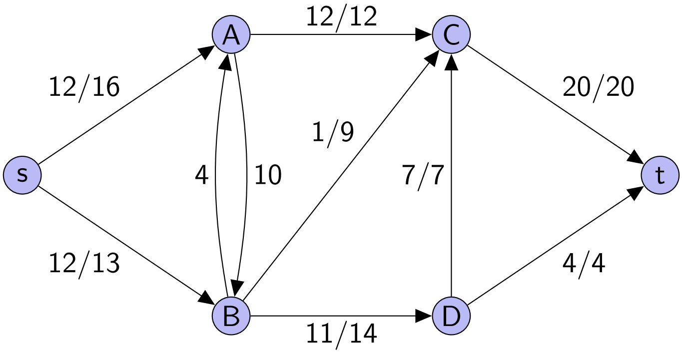
Beispiel (Anwendungen)

- Wie groß ist der maximale Datendurchsatz zwischen zwei Computern in einem Netzwerk?
- Wie kann der Verkehr in einem Straßennetz so geleitet werden, dass möglichst viele Autos in einer gegeben Zeitspanne ein Ziel erreichen?
- Wie viele Leitungen müssen zerstört sein, damit zwei Computer nicht mehr miteinander kommunizieren können?

Ein maximaler Fluss

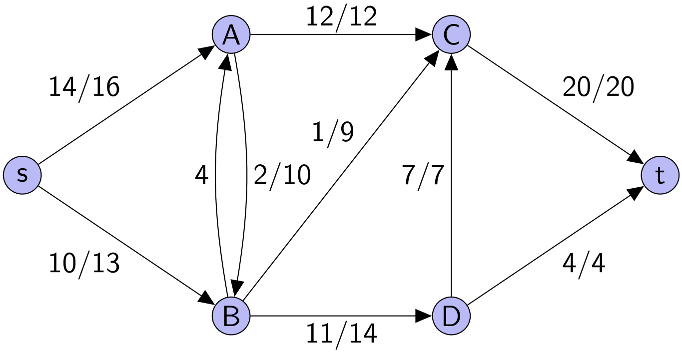


Ein maximaler Fluss



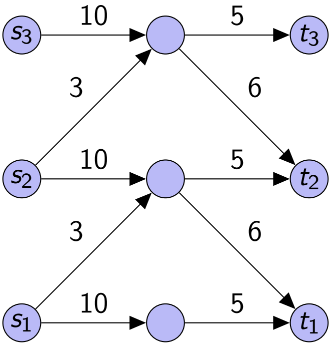
- Ein maximaler Fluss in diesem Beispiel hat den Wert $|f| = 24$.

Ein maximaler Fluss



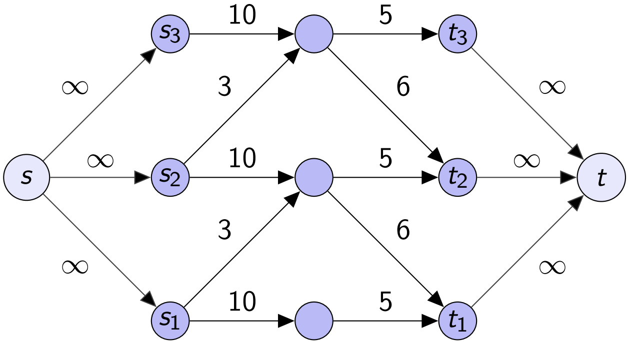
- Ein maximaler Fluss in diesem Beispiel hat den Wert $|f| = 24$.
- Es kann mehrere maximale Flüsse geben.

Mehrere Quellen und Senken



- Es kann auch Flussnetzwerke mit mehrere Quellen oder Senken geben.

Mehrere Quellen und Senken



- Es kann auch Flussnetzwerke mit mehrere Quellen oder Senken geben.
- Sie können durch eine neue „Superquelle" und „Supersenke" in ein übliches Flussnetzwerk überführt werden.

Flüsse zwischen Knotenmengen

Notationen

$$
\begin{aligned}
f(x, Y) &= \sum_{y \in Y} f(x, y) && \text{für } Y \subseteq V \\
f(X, y) &= \sum_{x \in X} f(x, y) && \text{für } X \subseteq V \\
f(X, Y) &= \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} f(x, y) && \text{für } X, Y \subseteq V
\end{aligned}
$$

Flüsse zwischen Knotenmengen

Notationen

$$
\begin{aligned}
f(x, Y) &= \sum_{y \in Y} f(x, y) && \text{für } Y \subseteq V \\
f(X, y) &= \sum_{x \in X} f(x, y) && \text{für } X \subseteq V \\
f(X, Y) &= \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} f(x, y) && \text{für } X, Y \subseteq V
\end{aligned}
$$

Eigenschaften von Flüssen zwischen Mengen

Falls f ein Fluss für Flussnetzwerk $G = (V, E, c)$ ist, dann gilt:

1. $f(X, X) = 0$ für $X \subseteq V$
2. $f(X, Y) = -f(Y, X)$ für $X, Y \subseteq V$
3. $f(X \cup Y, Z) = f(X, Z) + f(Y, Z)$ für $X, Y, Z \subseteq V : X \cap Y = \varnothing$
4. $f(Z, X \cup Y) = f(Z, X) + f(Z, Y)$ für $X, Y, Z \subseteq V : X \cap Y = \varnothing$

Beweis: $f(X, X) = 0$

$$f(X, X) = \sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} f(x_1, x_2)$$

Beweis: $f(X,X) = 0$

$$
\begin{aligned}
f(X,X) &= \sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} f(x_1, x_2) \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} f(x_1, x_2) + \sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} f(x_1, x_2) \right)
\end{aligned}
$$

Beweis: $f(X, X) = 0$

$$
\begin{aligned}
f(X, X) &= \sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} f(x_1, x_2) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} f(x_1, x_2) + \sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} f(x_1, x_2) \right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} f(x_1, x_2) + \sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} f(x_2, x_1) \right)
\end{aligned}
$$

Beweis: $f(X, X) = 0$

$$
\begin{aligned}
f(X, X) &= \sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} f(x_1, x_2) \\
&= \frac{1}{2} \Big(\sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} f(x_1, x_2) + \sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} f(x_1, x_2) \Big) \\
&= \frac{1}{2} \Big(\sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} f(x_1, x_2) + \sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} f(x_2, x_1) \Big) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} \big(f(x_1, x_2) + f(x_2, x_1) \big)
\end{aligned}
$$

Beweis: $f(X, X) = 0$

$$
\begin{aligned}
f(X, X) &= \sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} f(x_1, x_2) \\
&= \frac{1}{2}\Bigg(\sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} f(x_1, x_2) + \sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} f(x_1, x_2) \Bigg) \\
&= \frac{1}{2}\Bigg(\sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} f(x_1, x_2) + \sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} f(x_2, x_1) \Bigg) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} \Big(f(x_1, x_2) + f(x_2, x_1) \Big) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} \Big(f(x_1, x_2) - f(x_1, x_2) \Big)
\end{aligned}
$$

Beweis: $f(X, X) = 0$

$$
\begin{aligned}
f(X, X) &= \sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} f(x_1, x_2) \\
&= \frac{1}{2} \Big(\sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} f(x_1, x_2) + \sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} f(x_1, x_2) \Big) \\
&= \frac{1}{2} \Big(\sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} f(x_1, x_2) + \sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} f(x_2, x_1) \Big) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} \big(f(x_1, x_2) + f(x_2, x_1) \big) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} \big(f(x_1, x_2) - f(x_1, x_2) \big) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Beweis: $f(X, X) = 0$

$$
\begin{aligned}
f(X, X) &= \sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} f(x_1, x_2) \\
&= \frac{1}{2} \Bigg(\sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} f(x_1, x_2) + \sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} f(x_1, x_2) \Bigg) \\
&= \frac{1}{2} \Bigg(\sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} f(x_1, x_2) + \sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} f(x_2, x_1) \Bigg) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} \Big(f(x_1, x_2) + f(x_2, x_1) \Big) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} \Big(f(x_1, x_2) - f(x_1, x_2) \Big) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Für den Beweis benötigen wir lediglich die Eigenschaft der Asymmetrie.

Eingehender Fluss in der Senke

Wie groß ist der an der Senke eingehende Fluss?

Eingehender Fluss in der Senke

Wie groß ist der an der Senke eingehende Fluss?

Aufgrund der Flusserhaltung in alle Zwischenknoten ist zu erwarten, dass er dem austretenden Fluss an der Quelle entspricht:

$$f(s, V) = f(V, t)$$

Eingehender Fluss in der Senke

Wie groß ist der an der Senke eingehende Fluss?

Aufgrund der Flusserhaltung in alle Zwischenknoten ist zu erwarten, dass er dem austretenden Fluss an der Quelle entspricht:

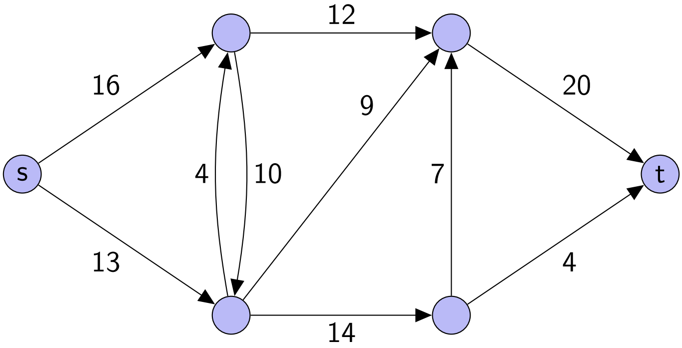
$$f(s, V) = f(V, t)$$

Beweis:

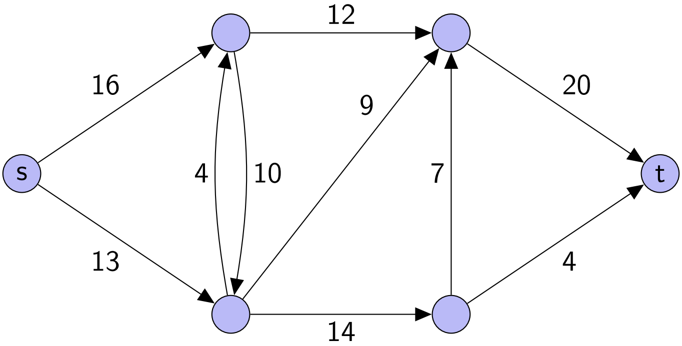
$$\begin{aligned}
f(s, V) &= f(V, V) - f(V - \{s\}, V) && \mid \text{Eigenschaft 3} \\
&= -f(V - \{s\}, V) && \mid \text{Eigenschaft 1} \\
&= f(V, V - \{s\}) && \mid \text{Eigenschaft 2} \\
&= f(V, t) + f(V, V - \{s, t\}) && \mid \text{Eigenschaft 4} \\
&= f(V, t). && \mid \text{Flusserhaltung}
\end{aligned}$$

Übersicht

Ford-Fulkerson-Methode – Idee

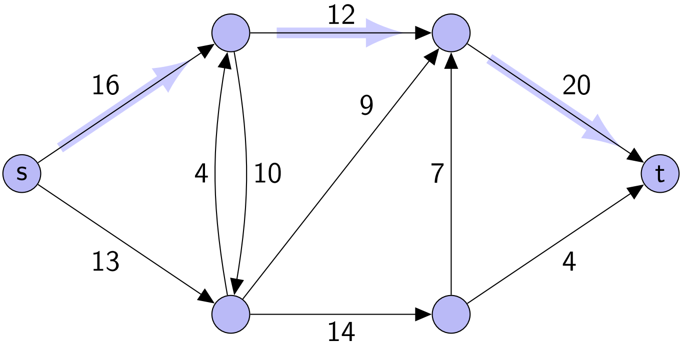


Ford-Fulkerson-Methode – Idee



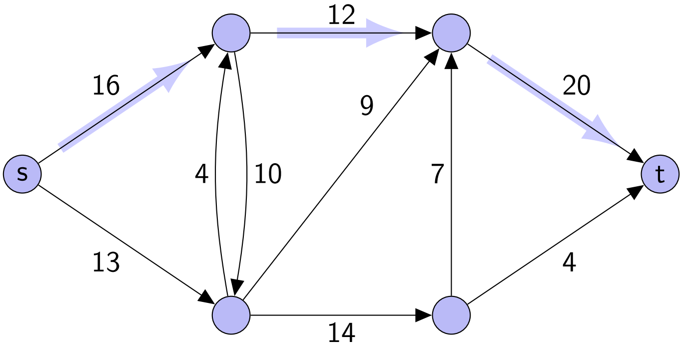
1. Suche einen Pfad p von s nach t.

Ford-Fulkerson-Methode – Idee



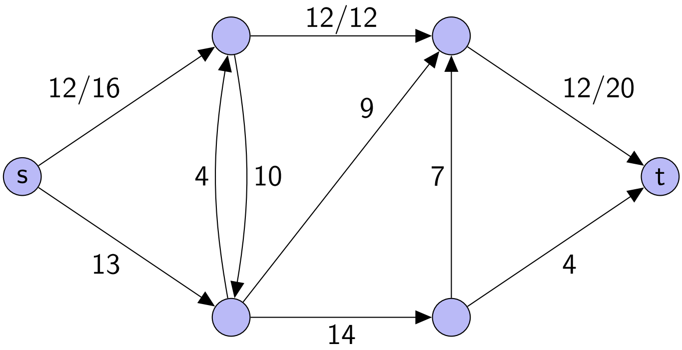
1. Suche einen Pfad p von s nach t.

Ford-Fulkerson-Methode – Idee



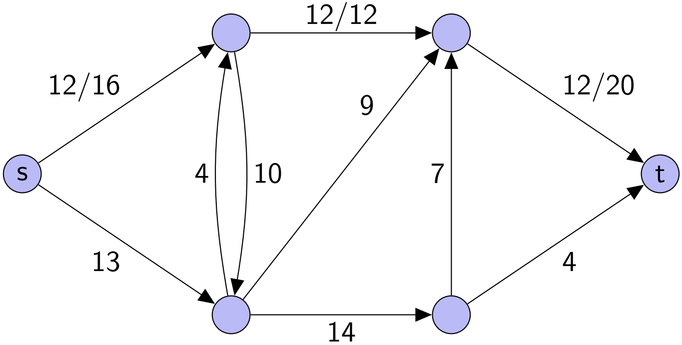
1. Suche einen Pfad p von s nach t.
2. Setze den Fluss der Kanten in p um die kleinste Kapazität in p.

Ford-Fulkerson-Methode – Idee



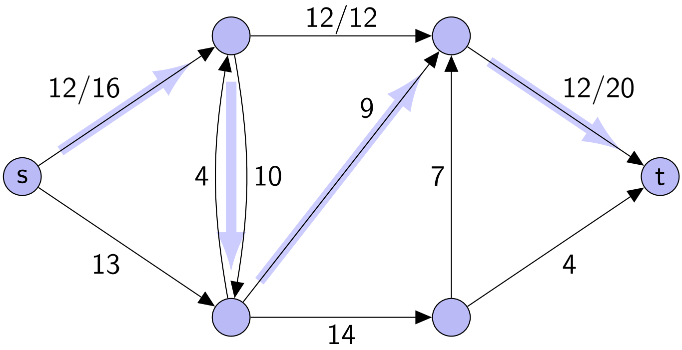
1. Suche einen Pfad p von s nach t.
2. Setze den Fluss der Kanten in p um die kleinste Kapazität in p.

Ford-Fulkerson-Methode – Idee



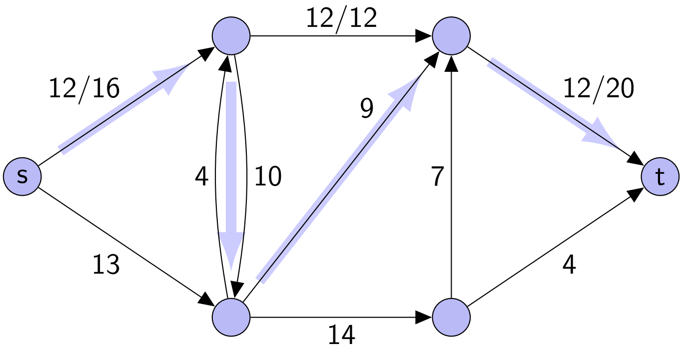
1. Suche einen Pfad p von s nach t.
2. Setze den Fluss der Kanten in p um die kleinste Kapazität in p.
3. Suche einen Pfad p' von s nach t, aus Kanten mit freier Kapazität.

Ford-Fulkerson-Methode – Idee



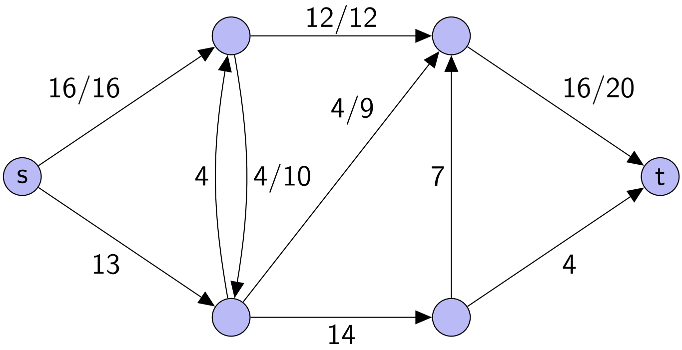
1. Suche einen Pfad p von s nach t.
2. Setze den Fluss der Kanten in p um die kleinste Kapazität in p.
3. Suche einen Pfad p' von s nach t, aus Kanten mit freier Kapazität.

Ford-Fulkerson-Methode – Idee



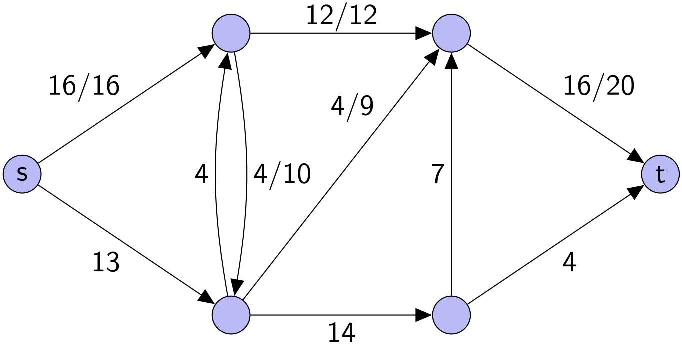
1. Suche einen Pfad p von s nach t.
2. Setze den Fluss der Kanten in p um die kleinste Kapazität in p.
3. Suche einen Pfad p' von s nach t, aus Kanten mit freier Kapazität.
4. Ergänze den Fluss der Kanten in p' um die kleinste Restkapazität in p.

Ford-Fulkerson-Methode – Idee



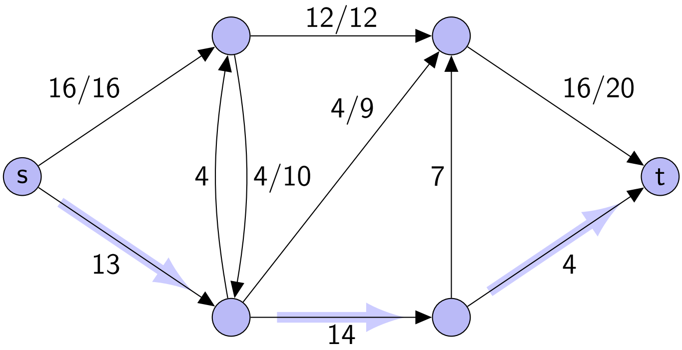
1. Suche einen Pfad p von s nach t.
2. Setze den Fluss der Kanten in p um die kleinste Kapazität in p.
3. Suche einen Pfad p' von s nach t, aus Kanten mit freier Kapazität.
4. Ergänze den Fluss der Kanten in p' um die kleinste Restkapazität in p.

Ford-Fulkerson-Methode – Idee



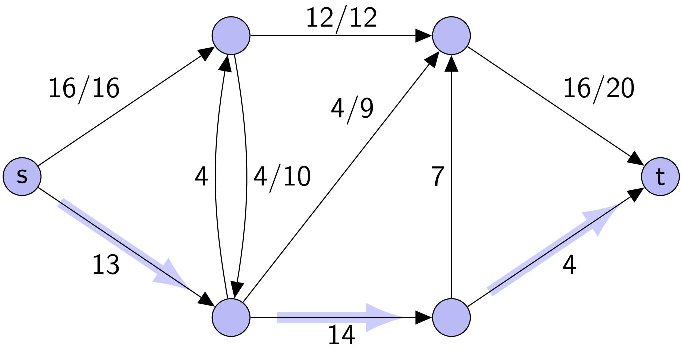
1. Suche einen Pfad p von s nach t.
2. Setze den Fluss der Kanten in p um die kleinste Kapazität in p.
3. Suche einen Pfad p' von s nach t, aus Kanten mit freier Kapazität.
4. Ergänze den Fluss der Kanten in p' um die kleinste Restkapazität in p.
5. Wiederhole 3. und 4. bis es keinen Pfad p mehr gibt.

Ford-Fulkerson-Methode – Idee



1. Suche einen Pfad p von s nach t.
2. Setze den Fluss der Kanten in p um die kleinste Kapazität in p.
3. Suche einen Pfad p' von s nach t, aus Kanten mit freier Kapazität.
4. Ergänze den Fluss der Kanten in p' um die kleinste Restkapazität in p.
5. Wiederhole 3. und 4. bis es keinen Pfad p mehr gibt.

Ford-Fulkerson-Methode – Idee



1. Suche einen Pfad p von s nach t.
2. Setze den Fluss der Kanten in p um die kleinste Kapazität in p.
3. Suche einen Pfad p' von s nach t, aus Kanten mit freier Kapazität.
4. Ergänze den Fluss der Kanten in p' um die kleinste Restkapazität in p.
5. Wiederhole 3. und 4. bis es keinen Pfad p mehr gibt.

Restnetzwerke

„Netzwerk minus Fluss = Restnetzwerk“

Restnetzwerke

„Netzwerk minus Fluss = Restnetzwerk“

Definition (Restnetzwerk G_f)

Sei Flussnetzwerk $G = (V, E, c)$ und Fluss f. Dann ist $G_f = (V, E_f, c_f)$ das Restnetzwerk (auch: Residualnetzwerk) zu G und f mit:

$$c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v),$$

und

$$E_f = \{ (u, v) \in V \times V \mid c_f(u, v) > 0 \},$$

$c_f(u, v)$ ist die Restkapazität von (u, v) in G zu Fluss f.

Restnetzwerk: Beispiel

Definition (Restnetzwerk G_f)

Sei Flussnetzwerk $G = (V, E, c)$ und Fluss f. Dann ist $G_f = (V, E_f, c_f)$ das Restnetzwerk (auch: Residualnetzwerk) zu G und f mit:

- $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$
- $E_f = \{ (u, v) \in V \times V \mid c_f(u, v) > 0 \}$.

$c_f(u, v)$ ist die Restkapazität von (u, v) in G zu Fluss f.

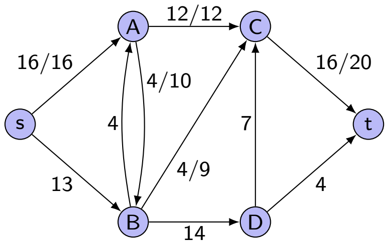
Restnetzwerk: Beispiel

Definition (Restnetzwerk G_f)

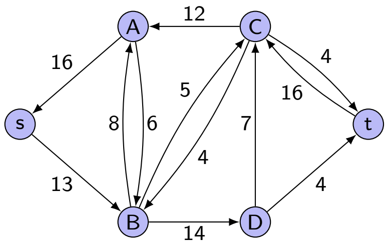
Sei Flussnetzwerk $G = (V, E, c)$ und Fluss f. Dann ist $G_f = (V, E_f, c_f)$ das Restnetzwerk (auch: Residualnetzwerk) zu G und f mit:

- $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$
- $E_f = \{ (u, v) \in V \times V \mid c_f(u, v) > 0 \}$.

$c_f(u, v)$ ist die Restkapazität von (u, v) in G zu Fluss f.



Flussnetzwerk G



Restnetzwerk G_f

Restnetzwerk: Beispiel

Definition (Restnetzwerk G_f)

Sei Flussnetzwerk $G = (V, E, c)$ und Fluss f. Dann ist $G_f = (V, E_f, c_f)$ das Restnetzwerk (auch: Residualnetzwerk) zu G und f mit:

- $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$
- $E_f = \{ (u, v) \in V \times V \mid c_f(u, v) > 0 \}$.

$c_f(u, v)$ ist die Restkapazität von (u, v) in G zu Fluss f.

Restnetzwerk: Beispiel

Definition (Restnetzwerk G_f)

Sei Flussnetzwerk $G = (V, E, c)$ und Fluss f. Dann ist $G_f = (V, E_f, c_f)$ das Restnetzwerk (auch: Residualnetzwerk) zu G und f mit:

- $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$
- $E_f = \{ (u, v) \in V \times V \mid c_f(u, v) > 0 \}$.

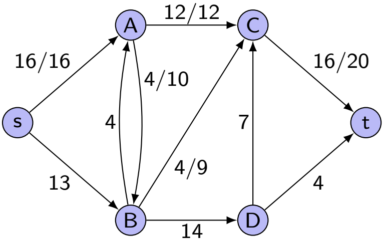
$c_f(u, v)$ ist die Restkapazität von (u, v) in G zu Fluss f.

Kanten im Restnetzwerk

- Falls $f(u, v) < c(u, v)$, dann folgt $c_f(u, v) > 0$ und $(u, v) \in E_f$
- Falls $f(u, v) > 0$, dann $f(v, u) < 0$, und damit $c_f(v, u) > 0$ und $(v, u) \in E_f$
- Falls weder $(u, v) \notin E$ noch $(v, u) \notin E$, dann $c_f(u, v) = c_f(v, u) = 0$

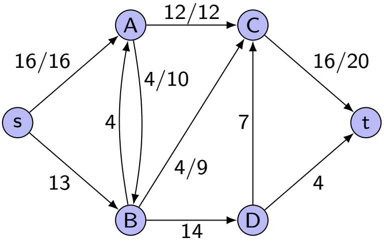
Also $|E_f| \leqslant 2 \cdot |E|$.

Augmentierende Pfade

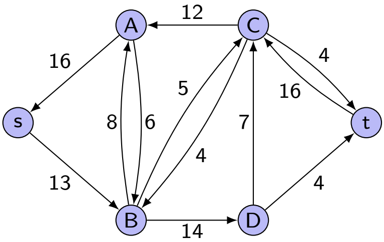


Flussnetzwerk G

Augmentierende Pfade

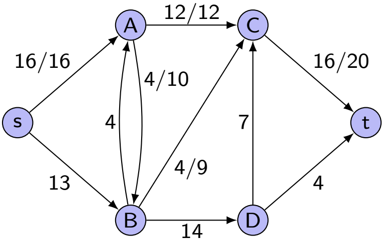


Flussnetzwerk G

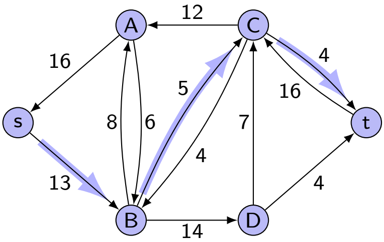


Restnetzwerk G_f

Augmentierende Pfade

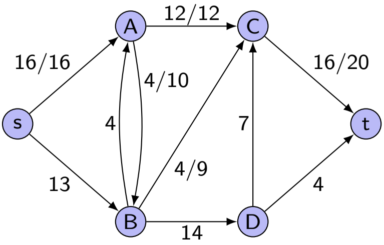


Flussnetzwerk G

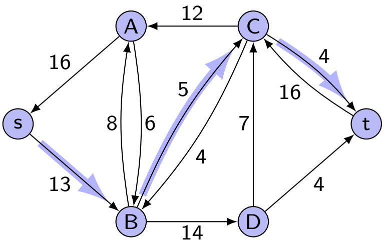


Restnetzwerk G_f

Augmentierende Pfade



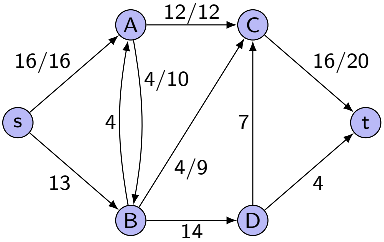
Flussnetzwerk G



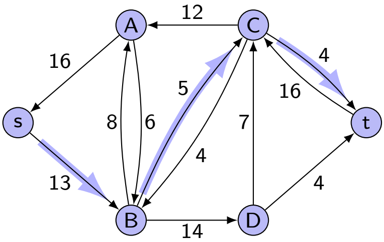
Restnetzwerk G_f

- Ein s-t-Pfad p in Restnetzwerk G_f heißt augmentierender Pfad (vergrößernder Pfad).

Augmentierende Pfade



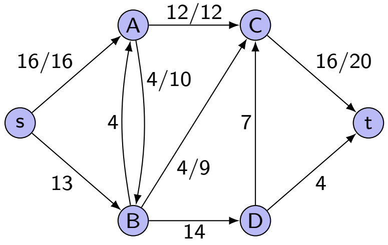
Flussnetzwerk G



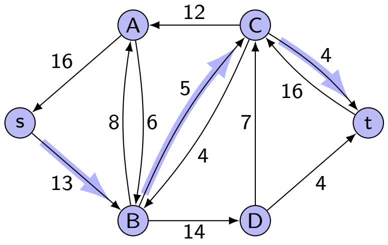
Restnetzwerk G_f

- Ein s-t-Pfad p in Restnetzwerk G_f heißt augmentierender Pfad (vergrößernder Pfad).
- $c_f(p) = \min\{\, c_f(u, v) \mid (u, v) \in p \,\}$ heißt Restkapazität von p.

Augmentierende Pfade



Flussnetzwerk G

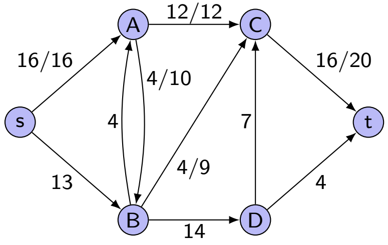


Restnetzwerk G_f

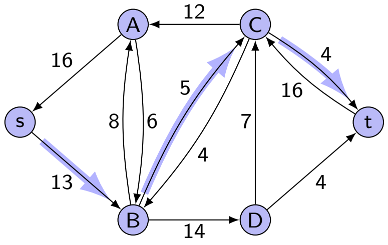
- Ein s-t-Pfad p in Restnetzwerk G_f heißt augmentierender Pfad (vergrößernder Pfad).
- $c_f(p) = \min\{\, c_f(u, v) \mid (u, v) \in p \,\}$ heißt Restkapazität von p.

Der Pfad im obigen Beispiel hat die Restkapazität 4.

Augmentierende Pfade



Flussnetzwerk G



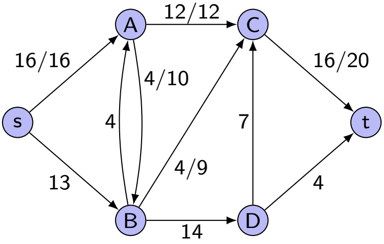
Restnetzwerk G_f

Sei G ein Flussnetzwerk, f ein Fluss in G, p ein augmentierender Pfad in G_f. Sei:

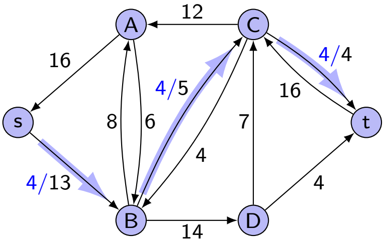
$$f_p(u, v) = \begin{cases} c_f(p) & \text{falls } (u, v) \text{ auf } p \\ -c_f(p) & \text{falls } (v, u) \text{ auf } p \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist f_p ein Fluss in Restnetzwerk G_f mit dem Wert $|f_p| = c_f(p) > 0$.

Augmentierende Pfade



Flussnetzwerk G



Restnetzwerk G_f

Sei G ein Flussnetzwerk, f ein Fluss in G, p ein augmentierender Pfad in G_f. Sei:

$$f_p(u, v) = \begin{cases} c_f(p) & \text{falls } (u, v) \text{ auf } p \\ -c_f(p) & \text{falls } (v, u) \text{ auf } p \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist f_p ein Fluss in Restnetzwerk G_f mit dem Wert $|f_p| = c_f(p) > 0$.

Ford-Fulkerson-Theorem

Idee: ergänze ein Fluss f in G um den Fluss f_p im Restnetzwerk G_f.

Ford-Fulkerson-Theorem

Idee: ergänze ein Fluss f in G um den Fluss f_p im Restnetzwerk G_f.

Sei $f_1, f_2 : V \times V \to \mathbb{R}$ zwei Flüsse. Die Flusssumme $f_1 + f_2$ ist definiert durch: $(f_1+f_2)(u, v) = f_1(u, v) + f_2(u, v)$.

Ford-Fulkerson-Theorem

Idee: ergänze ein Fluss f in G um den Fluss f_p im Restnetzwerk G_f.

Sei $f_1, f_2 : V \times V \to \mathbb{R}$ zwei Flüsse. Die Flusssumme $f_1 + f_2$ ist definiert durch: $(f_1 + f_2)(u, v) = f_1(u, v) + f_2(u, v)$.

Theorem (Ford-Fulkerson)

Sei $G = (V, E, c)$ ein Flussnetzwerk und f ein Fluss in G, sowie f' ein Fluss in G_f.

Dann gilt: $f + f'$ ist ein Fluss in G.

Ford-Fulkerson-Theorem

Idee: ergänze ein Fluss f in G um den Fluss f_p im Restnetzwerk G_f.

Sei $f_1, f_2 : V \times V \to \mathbb{R}$ zwei Flüsse. Die Flusssumme $f_1 + f_2$ ist definiert durch: $(f_1+f_2)(u, v) = f_1(u, v) + f_2(u, v)$.

Theorem (Ford-Fulkerson)

Sei $G = (V, E, c)$ ein Flussnetzwerk und f ein Fluss in G, sowie f' ein Fluss in G_f.

Dann gilt: $f + f'$ ist ein Fluss in G.

Beweis.

Wir zeigen, dass $f + f'$ beschränkt, asymmetrisch und flusserhaltend ist (s. nächste Folie). □

1. Asymmetrie:

$$
\begin{aligned}
(f + f')(u, v) &= f(u, v) + f'(u, v) \\
&= -f(v, u) - f'(v, u) \\
&= -(f(v, u) + f'(v, u)) \\
&= -(f + f')(v, u)
\end{aligned}
$$

1. Asymmetrie:

$$\begin{aligned}(f+f')(u,v) &= f(u,v)+f'(u,v)\\ &= -f(v,u)-f'(v,u)\\ &= -(f(v,u)+f'(v,u))\\ &= -(f+f')(v,u)\end{aligned}$$

2. Flusserhaltung:

$$(f+f')(u,V) = f(u,V)+f'(u,V)=0 \qquad |\, \forall u \in V-\{s,t\}$$

1. Asymmetrie:

$$\begin{aligned}(f+f')(u,v) &= f(u,v)+f'(u,v)\\ &= -f(v,u)-f'(v,u)\\ &= -(f(v,u)+f'(v,u))\\ &= -(f+f')(v,u)\end{aligned}$$

2. Flusserhaltung:

$$(f+f')(u,V) \;=\; f(u,V)+f'(u,V)=0 \qquad \mid \forall u \in V-\{s,t\}$$

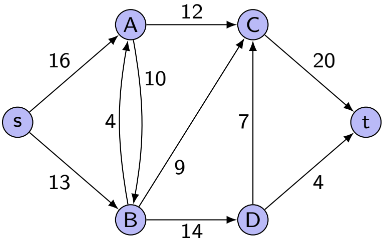
3. Beschränkung:

$$\begin{aligned}(f+f')(u,v) &= f(u,v)+f'(u,v)\\ &\leqslant f(u,v)+c_f(u,v)\\ &= f(u,v)+(c(u,v)-f(u,v))\\ &= c(u,v).\end{aligned}$$

Die Ford-Fulkerson-Methode

Algorithmus

Initialisiere Fluss f zu 0
while es gibt einen augmentierenden Pfad p
  do augmentiere f entlang p // $f := f + f_p$
return f



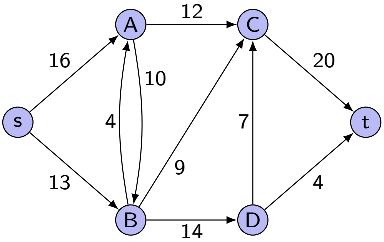
Flussnetzwerk G

|only<2>Restnetzwerk G_f

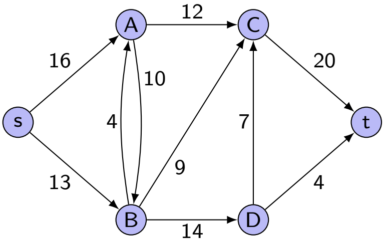
Die Ford-Fulkerson-Methode

Algorithmus

Initialisiere Fluss f zu 0
while es gibt einen augmentierenden Pfad p
  do augmentiere f entlang p $// \; f := f + f_p$
return f



Flussnetzwerk G

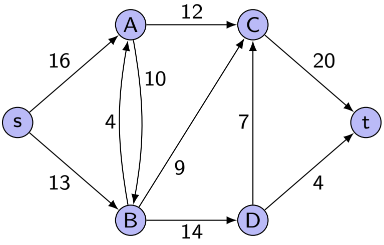


|only<2>Restnetzwerk G_f

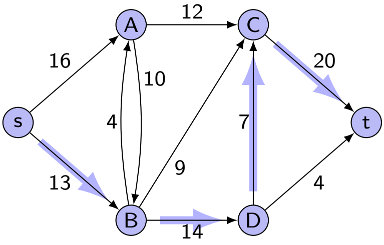
Die Ford-Fulkerson-Methode

Algorithmus

Initialisiere Fluss f zu 0
while es gibt einen augmentierenden Pfad p
  do augmentiere f entlang p // $f := f + f_p$
return f



Flussnetzwerk G

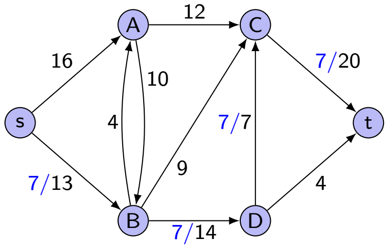


|only<2>Restnetzwerk G_f

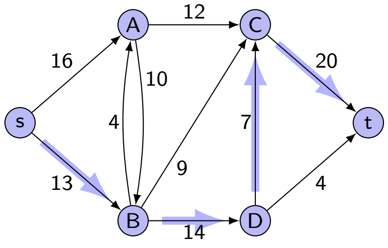
Die Ford-Fulkerson-Methode

Algorithmus

Initialisiere Fluss f zu 0
while es gibt einen augmentierenden Pfad p
  do augmentiere f entlang p // $f := f + f_p$
return f



Flussnetzwerk G

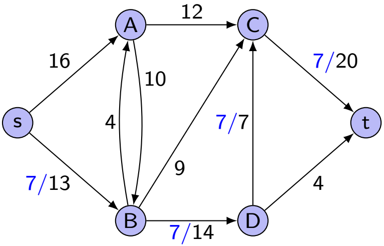


|only<2>Restnetzwerk G_f

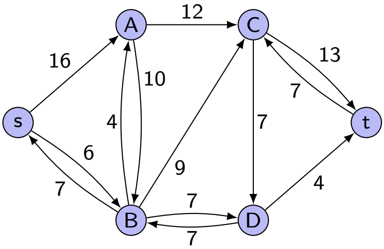
Die Ford-Fulkerson-Methode

Algorithmus

Initialisiere Fluss f zu 0
while es gibt einen augmentierenden Pfad p
  do augmentiere f entlang p $// \; f := f + f_p$
return f



Flussnetzwerk G

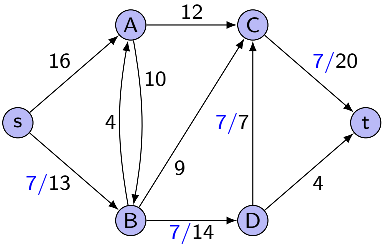


|only<2>Restnetzwerk G_f

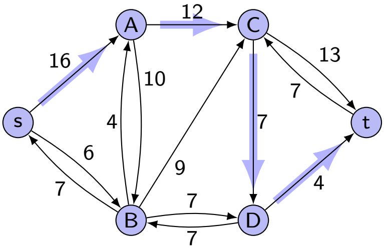
Die Ford-Fulkerson-Methode

Algorithmus

Initialisiere Fluss f zu 0
while es gibt einen augmentierenden Pfad p
  do augmentiere f entlang p $// \; f := f + f_p$
return f



Flussnetzwerk G

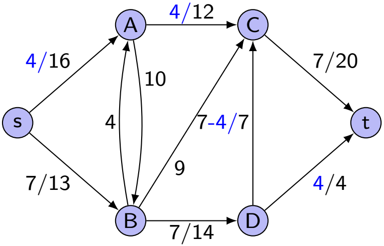


|only<2>Restnetzwerk G_f

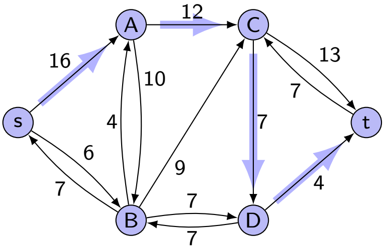
Die Ford-Fulkerson-Methode

Algorithmus

Initialisiere Fluss f zu 0
while es gibt einen augmentierenden Pfad p
  do augmentiere f entlang p // $f := f + f_p$
return f



Flussnetzwerk G

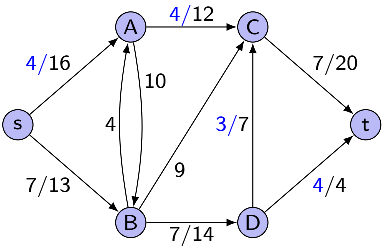


|only<2>Restnetzwerk G_f

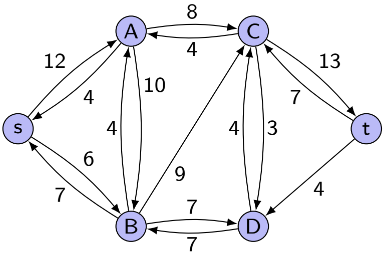
Die Ford-Fulkerson-Methode

Algorithmus

Initialisiere Fluss f zu 0
while es gibt einen augmentierenden Pfad p
  do augmentiere f entlang p $// \; f := f + f_p$
return f



Flussnetzwerk G

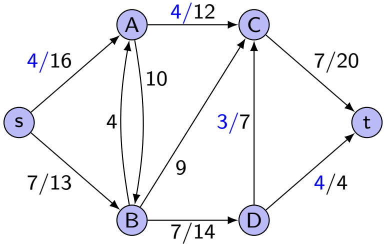


|only<2>Restnetzwerk G_f

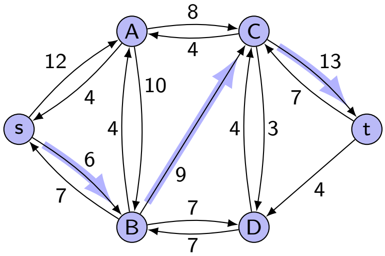
Die Ford-Fulkerson-Methode

Algorithmus

Initialisiere Fluss f zu 0
while es gibt einen augmentierenden Pfad p
  do augmentiere f entlang p // $f := f + f_p$
return f



Flussnetzwerk G

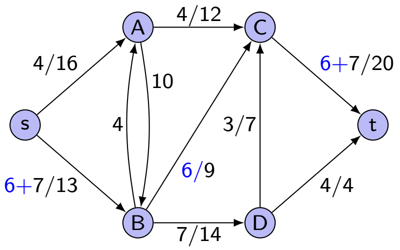


|only<2>Restnetzwerk G_f

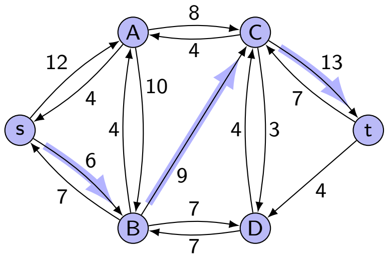
Die Ford-Fulkerson-Methode

Algorithmus

Initialisiere Fluss f zu 0
while es gibt einen augmentierenden Pfad p
  do augmentiere f entlang p // $f := f + f_p$
return f



Flussnetzwerk G

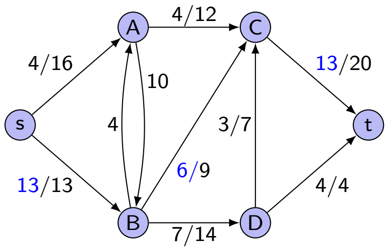


|only<2>Restnetzwerk G_f

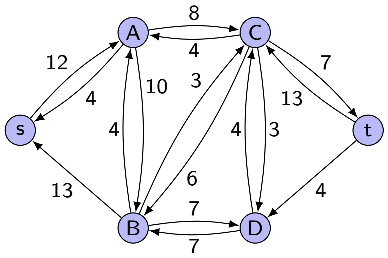
Die Ford-Fulkerson-Methode

Algorithmus

Initialisiere Fluss f zu 0
while es gibt einen augmentierenden Pfad p
  do augmentiere f entlang p // $f := f + f_p$
return f



Flussnetzwerk G

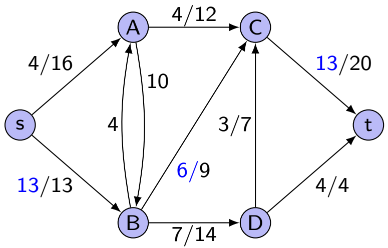


|only<2>Restnetzwerk G_f

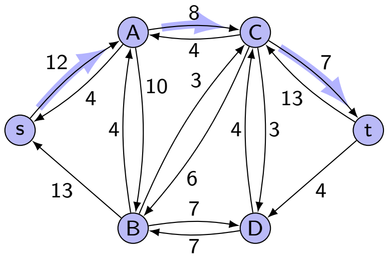
Die Ford-Fulkerson-Methode

Algorithmus

Initialisiere Fluss f zu 0
while es gibt einen augmentierenden Pfad p
  do augmentiere f entlang p // $f := f + f_p$
return f



Flussnetzwerk G

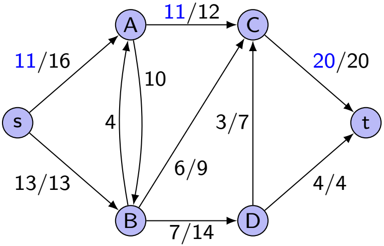


|only<2>Restnetzwerk G_f

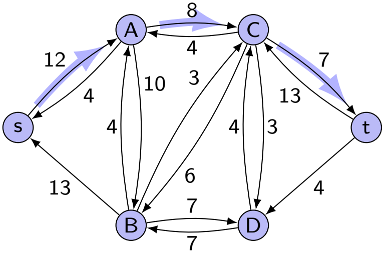
Die Ford-Fulkerson-Methode

Algorithmus

Initialisiere Fluss f zu 0
while es gibt einen augmentierenden Pfad p
  do augmentiere f entlang p $// \; f := f + f_p$
return f



Flussnetzwerk G

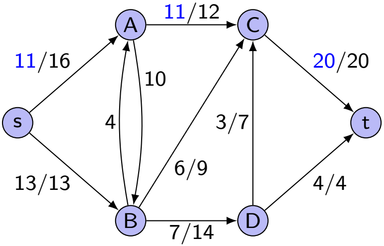


$|$only$<2>$Restnetzwerk G_f

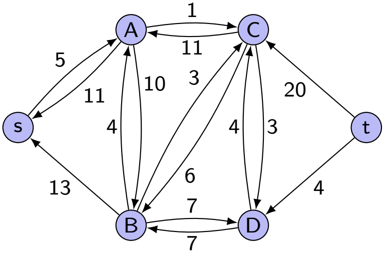
Die Ford-Fulkerson-Methode

Algorithmus

Initialisiere Fluss f zu 0
while es gibt einen augmentierenden Pfad p
  do augmentiere f entlang p // $f := f + f_p$
return f



Flussnetzwerk G

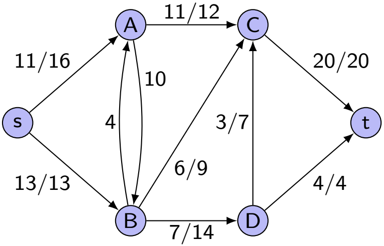


|only<2>Restnetzwerk G_f

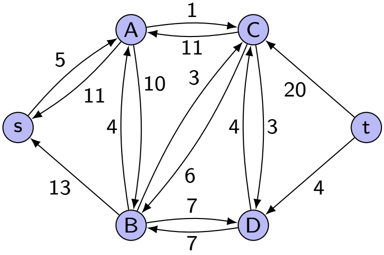
Die Ford-Fulkerson-Methode

Algorithmus

Initialisiere Fluss f zu 0
while es gibt einen augmentierenden Pfad p
  do augmentiere f entlang p // $f := f + f_p$
return f



Flussnetzwerk G



|only<2>Restnetzwerk G_f

Implementierung Ford-Fulkerson-Methode

```
int[n,n] maxFlow(List adjLst[n], int n, int s, int t) {
  int flow[n,n] = 0, path[];
  int cfp; // Restkapazität des Pfades

  while (true) {
    // Finde augmentierenden Pfad und dessen Restkapazität
    (path, cfp) = augmentPfad(adjLst, flow, s, t);
    if (cfp == 0) { // kein Pfad gefunden
      return flow;
    }

    // addiere Restkapazität entlang des Pfades zum Fluss
    for (int i = 1; i < pfad.length; i++) {
      int u = pfad[i-1], v = pfad[i];
      f[u,v] = f[u,v] + cfp;
      f[v,u] = -f[u,v];
    }
  }
}
```

Laufzeit der Ford-Fulkerson-Methode

Ein Flussproblem ist integral, wenn alle Kapazitäten ganzzahlig sind.

Laufzeit der Ford-Fulkerson-Methode

Ein Flussproblem ist integral, wenn alle Kapazitäten ganzzahlig sind.

Theorem

Sei f^* der durch die Ford-Fulkerson-Methode bestimmte Fluss zu einem integralen Flussproblem, so benötigt die Methode $|f^*|$ Iterationen und es ergibt sich eine Laufzeit von $O(E \cdot |f^*|)$.

Laufzeit der Ford-Fulkerson-Methode

Ein Flussproblem ist integral, wenn alle Kapazitäten ganzzahlig sind.

Theorem

Sei f^* der durch die Ford-Fulkerson-Methode bestimmte Fluss zu einem integralen Flussproblem, so benötigt die Methode $|f^*|$ Iterationen und es ergibt sich eine Laufzeit von $O(E \cdot |f^*|)$.

Beweis.

In jeder Iteration wird der Wert des Flusses um $c_f(p) \geqslant 1$ erhöht.
Er ist anfangs 0 und am Ende f^*. $\square$

Laufzeit der Ford-Fulkerson-Methode

Ein Flussproblem ist integral, wenn alle Kapazitäten ganzzahlig sind.

Theorem

Sei f^* der durch die Ford-Fulkerson-Methode bestimmte Fluss zu einem integralen Flussproblem, so benötigt die Methode $|f^*|$ Iterationen und es ergibt sich eine Laufzeit von $O(E \cdot |f^*|)$.

Beweis.

In jeder Iteration wird der Wert des Flusses um $c_f(p) \geqslant 1$ erhöht.
Er ist anfangs 0 und am Ende f^*. $\square$

Korollar

Bei rationalen Kapazitäten terminiert die Ford–Fulkerson–Methode.
Brüche können durch Multiplikation aufgehoben werden.

Laufzeit der Ford-Fulkerson-Methode

Ein Flussproblem ist integral, wenn alle Kapazitäten ganzzahlig sind.

Theorem

Sei f^* der durch die Ford-Fulkerson-Methode bestimmte Fluss zu einem integralen Flussproblem, so benötigt die Methode $|f^*|$ Iterationen und es ergibt sich eine Laufzeit von $O(E \cdot |f^*|)$.

Beweis.

In jeder Iteration wird der Wert des Flusses um $c_f(p) \geqslant 1$ erhöht.
Er ist anfangs 0 und am Ende f^*. □

Korollar

Bei rationalen Kapazitäten terminiert die Ford–Fulkerson–Methode.
Brüche können durch Multiplikation aufgehoben werden.

- Für ein integrales Flussproblem bestimmt die Ford-Fulkerson-Methode einen Fluss f, sodass jedes $f(u, v)$ ganzzahlig ist.

Korrektheit Ford-Fulkerson Methode

Die Ford-Fulkerson Methode erweitert sukzessive den Fluss in G
um augmentierende Pfade im Restnetzwerk G_f
bis es keine solche Pfade mehr gibt.

Korrektheit Ford-Fulkerson Methode

Die Ford-Fulkerson Methode erweitert sukzessive den Fluss in G
um augmentierende Pfade im Restnetzwerk G_f
bis es keine solche Pfade mehr gibt.

Ist das korrekt?

Korrektheit Ford-Fulkerson Methode

Die Ford-Fulkerson Methode erweitert sukzessive den Fluss in G
um augmentierende Pfade im Restnetzwerk G_f
bis es keine solche Pfade mehr gibt.

Ist das korrekt?

Wir werden zeigen, dass ein Fluss in G genau dann maximal ist, wenn sein Restnetzwerk keine augmentierende Pfade enthält.

Korrektheit Ford-Fulkerson Methode

Die Ford-Fulkerson Methode erweitert sukzessive den Fluss in G
um augmentierende Pfade im Restnetzwerk G_f
bis es keine solche Pfade mehr gibt.

Ist das korrekt?

Wir werden zeigen, dass ein Fluss in G genau dann maximal ist, wenn sein Restnetzwerk keine augmentierende Pfade enthält.

Dazu benutzen wir Schnitte.

Schnitte in Flussnetzwerken

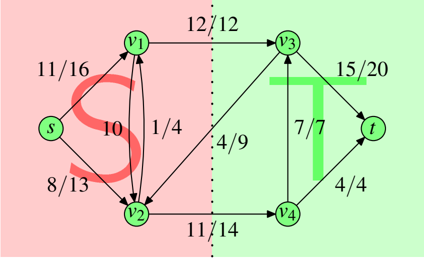
Definition

Ein Schnitt (S, T) in einem Flussnetzwerk $G = (V, E, c)$ ist eine Partition $S \cup T = V$, $S \cap T = \varnothing$ mit $s \in S$ und $t \in T$.

Schnitte in Flussnetzwerken

Definition

Ein Schnitt (S, T) in einem Flussnetzwerk $G = (V, E, c)$ ist eine Partition $S \cup T = V$, $S \cap T = \varnothing$ mit $s \in S$ und $t \in T$.

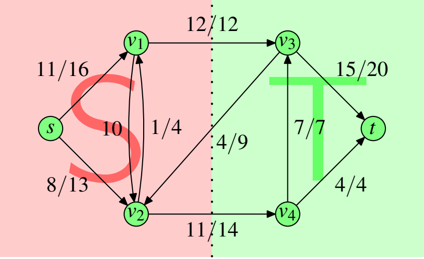


Schnitte in Flussnetzwerken

Definition

Ein Schnitt (S, T) in einem Flussnetzwerk $G = (V, E, c)$ ist eine Partition $S \cup T = V$, $S \cap T = \varnothing$ mit $s \in S$ und $t \in T$.

- Wenn f ein Fluss in G ist, dann ist $f(S, T)$ der Fluss über (S, T).

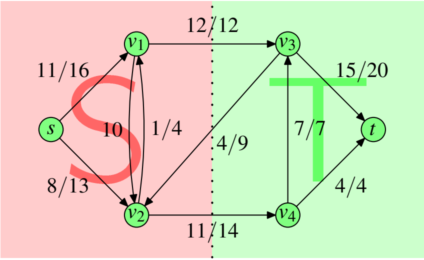


Schnitte in Flussnetzwerken

Definition

Ein Schnitt (S, T) in einem Flussnetzwerk $G = (V, E, c)$ ist eine Partition $S \cup T = V$, $S \cap T = \varnothing$ mit $s \in S$ und $t \in T$.

- Wenn f ein Fluss in G ist, dann ist $f(S, T)$ der Fluss über (S, T).
- Die Kapazität von (S, T) ist $c(S, T)$.

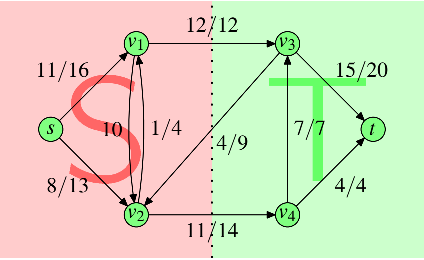


Schnitte in Flussnetzwerken

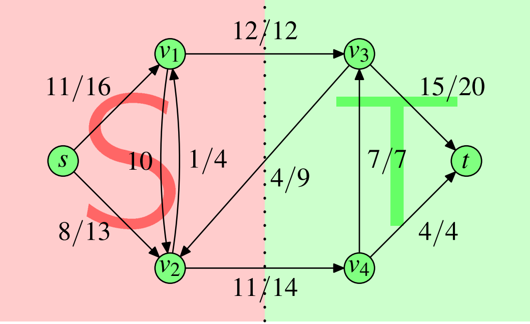
Definition

Ein Schnitt (S, T) in einem Flussnetzwerk $G = (V, E, c)$ ist eine Partition $S \cup T = V$, $S \cap T = \varnothing$ mit $s \in S$ und $t \in T$.

- Wenn f ein Fluss in G ist, dann ist $f(S, T)$ der Fluss über (S, T).
- Die Kapazität von (S, T) ist $c(S, T)$.
- Ein minimaler Schnitt ist ein Schnitt mit minimaler Kapazität.

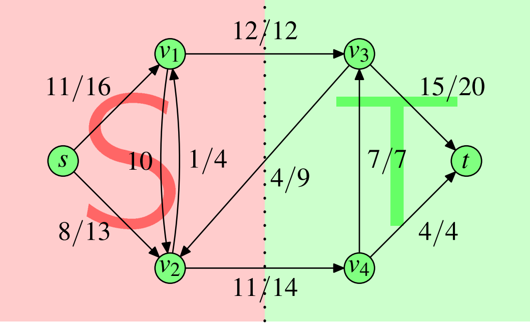


Schnitte in Netzwerken



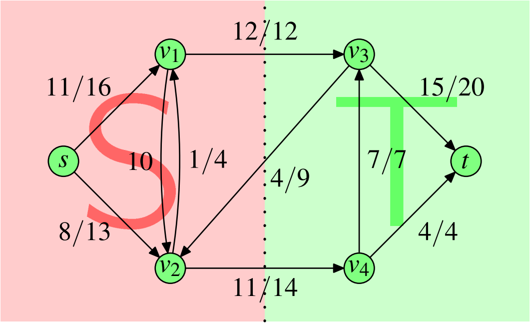
S	:	$\{s, v_1, v_2\}$
T	:	$\{t, v_3, v_4\}$
Fluss	:	
Kapazität	:	

Schnitte in Netzwerken



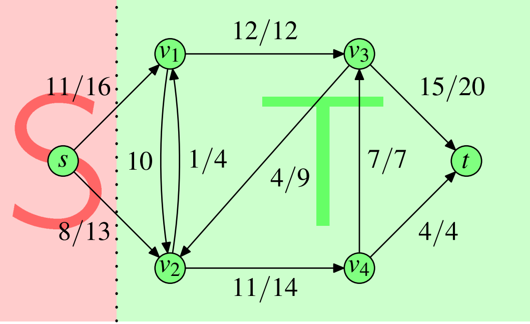
S	:	$\{s, v_1, v_2\}$	
T	:	$\{t, v_3, v_4\}$	
Fluss	:	19	
Kapazität	:		

Schnitte in Netzwerken



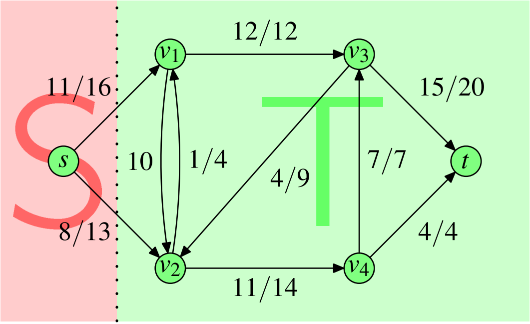
S	:	$\{s, v_1, v_2\}$
T	:	$\{t, v_3, v_4\}$
Fluss	:	19
Kapazität	:	26

Schnitte in Netzwerken



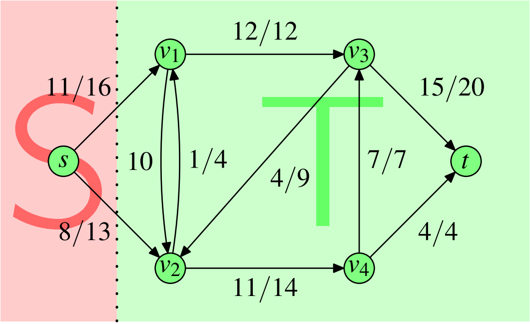
S	:	$\{s, v_1, v_2\}$	$\{s\}$
T	:	$\{t, v_3, v_4\}$	$\{t, v_1, v_2, v_3, v_4\}$
Fluss	:	19	
Kapazität	:	26	

Schnitte in Netzwerken



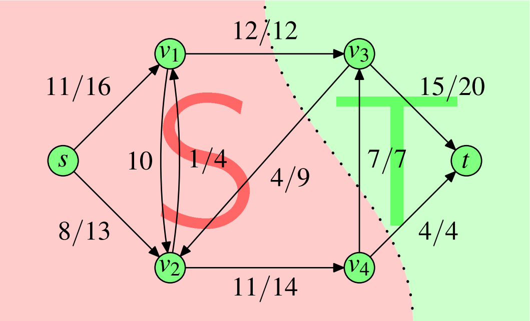
S	:	$\{s, v_1, v_2\}$	$\{s\}$
T	:	$\{t, v_3, v_4\}$	$\{t, v_1, v_2, v_3, v_4\}$
Fluss	:	19	19
Kapazität	:	26	

Schnitte in Netzwerken



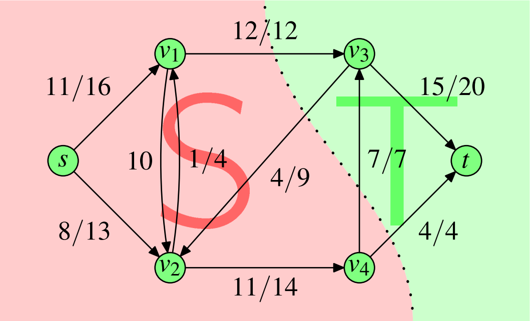
S	:	$\{s, v_1, v_2\}$	$\{s\}$
T	:	$\{t, v_3, v_4\}$	$\{t, v_1, v_2, v_3, v_4\}$
Fluss	:	19	19
Kapazität	:	26	29

Schnitte in Netzwerken



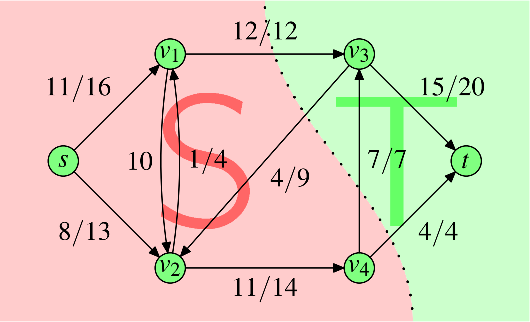
S	:	$\{s, v_1, v_2\}$	$\{s\}$	$\{s, v_1, v_2, v_4\}$
T	:	$\{t, v_3, v_4\}$	$\{t, v_1, v_2, v_3, v_4\}$	$\{t, v_3\}$
Fluss	:	19	19	
Kapazität	:	26	29	

Schnitte in Netzwerken



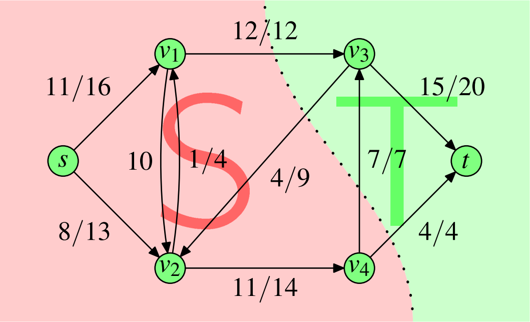
S	:	$\{s, v_1, v_2\}$	$\{s\}$	$\{s, v_1, v_2, v_4\}$
T	:	$\{t, v_3, v_4\}$	$\{t, v_1, v_2, v_3, v_4\}$	$\{t, v_3\}$
Fluss	:	19	19	19
Kapazität	:	26	29	

Schnitte in Netzwerken



S	:	$\{s, v_1, v_2\}$	$\{s\}$	$\{s, v_1, v_2, v_4\}$
T	:	$\{t, v_3, v_4\}$	$\{t, v_1, v_2, v_3, v_4\}$	$\{t, v_3\}$
Fluss	:	19	19	19
Kapazität	:	26	29	23

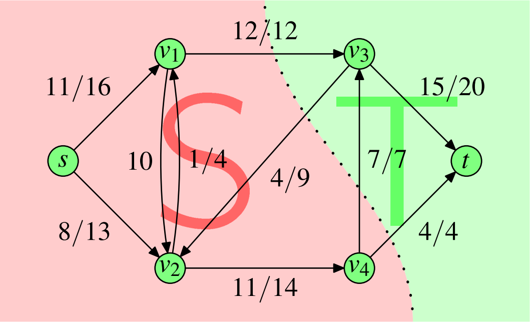
Schnitte in Netzwerken



S	:	$\{s, v_1, v_2\}$	$\{s\}$	$\{s, v_1, v_2, v_4\}$
T	:	$\{t, v_3, v_4\}$	$\{t, v_1, v_2, v_3, v_4\}$	$\{t, v_3\}$
Fluss	:	19	19	19
Kapazität	:	26	29	23

- Für den Fluss über einen Schnitt gilt: $f(S, T) = |f|$

Schnitte in Netzwerken



S	:	$\{s, v_1, v_2\}$	$\{s\}$	$\{s, v_1, v_2, v_4\}$
T	:	$\{t, v_3, v_4\}$	$\{t, v_1, v_2, v_3, v_4\}$	$\{t, v_3\}$
Fluss	:	19	19	19
Kapazität	:	26	29	23

- Für den Fluss über einen Schnitt gilt: $f(S, T) = |f| \leqslant c(S, T)$.

Max-flow Min-cut Theorem

Theorem (Max-flow Min-cut)

Sei f ein Fluss im Flussnetzwerk $G = (V, E, c)$, dann sind äquivalent:

1. *f ist ein maximaler Fluss.*
2. *In G_f gibt es keinen augmentierenden Pfad.*
3. *$|f| = c(S, T)$ für einen Schnitt (S, T), d. h. (S, T) ist minimal.*

Max-flow Min-cut Theorem

Theorem (Max-flow Min-cut)

Sei f ein Fluss im Flussnetzwerk $G = (V, E, c)$, dann sind äquivalent:

1. *f ist ein maximaler Fluss.*
2. *In G_f gibt es keinen augmentierenden Pfad.*
3. *$|f| = c(S, T)$ für einen Schnitt (S, T), d. h. (S, T) ist minimal.*

Folgerungen

1. Die Kapazität eines minimalen Schnittes ist gleich dem Wert eines maximalen Flusses.
2. Falls die Ford–Fulkerson–Methode terminiert, berechnet sie einen maximalen Fluss.

Max-flow Min-cut Theorem

Theorem (Max-flow Min-cut)

Sei f ein Fluss im Flussnetzwerk $G = (V, E, c)$, dann sind äquivalent:

1. *f ist ein maximaler Fluss.*
2. *In G_f gibt es keinen augmentierenden Pfad.*
3. *$|f| = c(S, T)$ für einen Schnitt (S, T), d. h. (S, T) ist minimal.*

1. ⇒ 2. (Widerspruchsbeweis).

Sei f ein maximaler Fluss in G und p einen augmentierender Pfad in G_f.

⇒ $f + f_p$ ist ein Fluss in G mit $|f + f_p| > |f|$.

⇒ Widerspruch! Denn f ist ein maximaler Fluss.

□

Max-flow Min-cut Theorem

Theorem (Max-flow Min-cut)

Sei f ein Fluss im Flussnetzwerk $G = (V, E, c)$, dann sind äquivalent:

1. *f ist ein maximaler Fluss.*
2. *In G_f gibt es keinen augmentierenden Pfad.*
3. *$|f| = c(S, T)$ für einen Schnitt (S, T), d. h. (S, T) ist minimal.*

2. $\Rightarrow$ 3.

Es gibt keinen s-t-Pfad (d.h. augmentierden Pfad) in G_f.

Sei $S := \{ v \in V \mid \exists\ s\text{-}v\text{-Pfad in } G_f \}$ und $T := V - S$, dann gilt:

1. $\forall u \in S,\ v \in T$ gilt: $c_f(u, v) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(u, v) = c(u, v)$.
2. (S, T) ist ein Schnitt und somit gilt $f(S, T) = |f|$.

$\Rightarrow$ $c(S, T) = f(S, T) = |f|$.

$\square$

Max-flow Min-cut Theorem

Theorem (Max-flow Min-cut)

Sei f ein Fluss im Flussnetzwerk $G = (V, E, c)$, dann sind äquivalent:

1. *f ist ein maximaler Fluss.*
2. *In G_f gibt es keinen augmentierenden Pfad.*
3. *$|f| = c(S, T)$ für einen Schnitt (S, T), d. h. (S, T) ist minimal.*

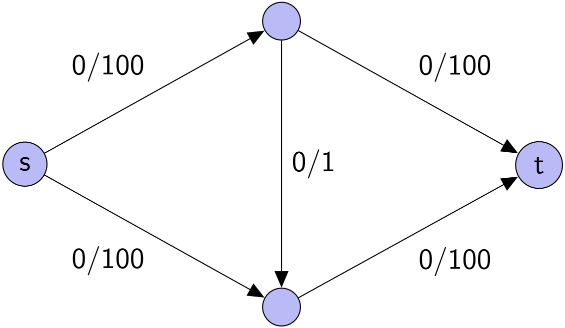
3. $\Rightarrow$ 1.

Sei f' ein beliebiger Fluss in G dann gilt:

$$|f'| = f'(S, T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f'(u, v) \leqslant \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u, v) = c(S, T)$$

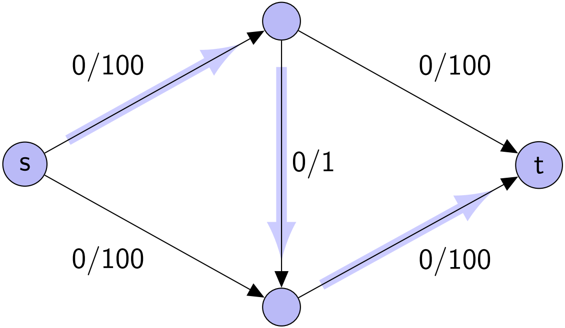
Da $|f| = c(S, T)$ und $\forall f' : |f'| \leqslant c(S, T)$, folgt f ist maximal. $\square$

Laufzeit der Ford-Fulkerson-Methode



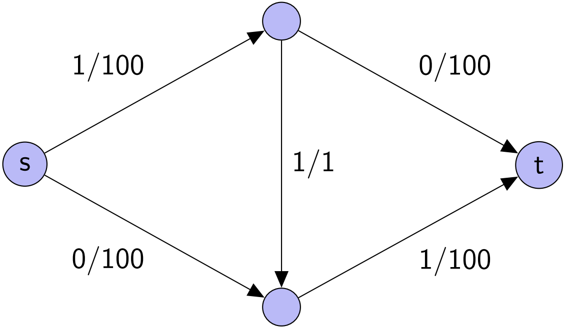
Die Worst-Case-Laufzeit ist abhängig vom Wert eines maximalen Flusses, da der Wert des Flusses im schlimmsten Fall sich jeweils nur um eine Einheit erhöht.

Laufzeit der Ford-Fulkerson-Methode



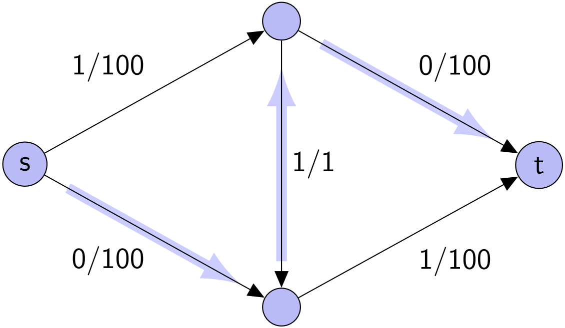
Die Worst-Case-Laufzeit ist abhängig vom Wert eines maximalen Flusses, da der Wert des Flusses im schlimmsten Fall sich jeweils nur um eine Einheit erhöht.

Laufzeit der Ford-Fulkerson-Methode



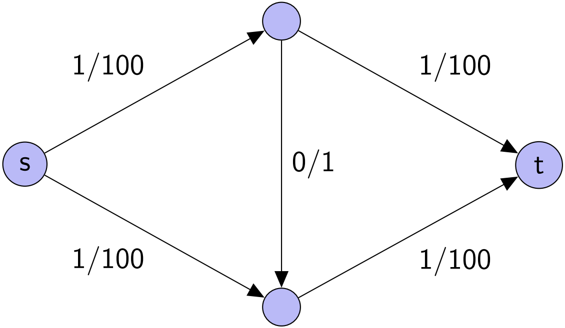
Die Worst-Case-Laufzeit ist abhängig vom Wert eines maximalen Flusses, da der Wert des Flusses im schlimmsten Fall sich jeweils nur um eine Einheit erhöht.

Laufzeit der Ford-Fulkerson-Methode



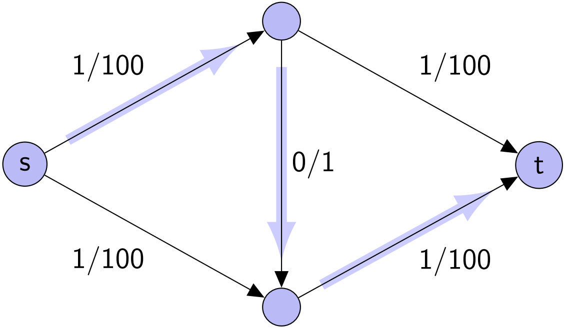
Die Worst-Case-Laufzeit ist abhängig vom Wert eines maximalen Flusses, da der Wert des Flusses im schlimmsten Fall sich jeweils nur um eine Einheit erhöht.

Laufzeit der Ford-Fulkerson-Methode



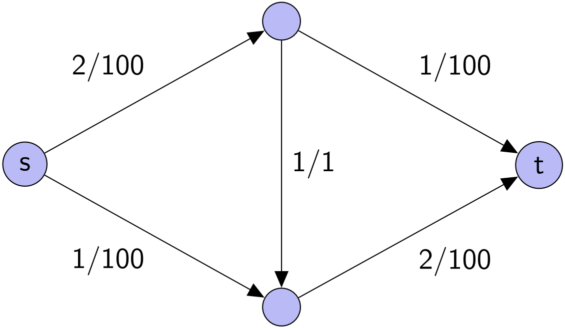
Die Worst-Case-Laufzeit ist abhängig vom Wert eines maximalen Flusses, da der Wert des Flusses im schlimmsten Fall sich jeweils nur um eine Einheit erhöht.

Laufzeit der Ford-Fulkerson-Methode



Die Worst-Case-Laufzeit ist abhängig vom Wert eines maximalen Flusses, da der Wert des Flusses im schlimmsten Fall sich jeweils nur um eine Einheit erhöht.

Laufzeit der Ford-Fulkerson-Methode



Die Worst-Case-Laufzeit ist abhängig vom Wert eines maximalen Flusses, da der Wert des Flusses im schlimmsten Fall sich jeweils nur um eine Einheit erhöht.

Übersicht

Edmonds-Karp-Algorithmus

Edmonds-Karp-Algorithmus

Eine Implementierung der Ford-Fulkerson-Methode, die zur Bestimmung augmentierender Pfade eine Breitensuche nutzt. Laufzeit: $O(V \cdot E^2)$.
1ex]

Edmonds-Karp-Algorithmus

Edmonds-Karp-Algorithmus

Eine Implementierung der Ford-Fulkerson-Methode, die zur Bestimmung augmentierender Pfade eine Breitensuche nutzt. Laufzeit: $O(V \cdot E^2)$.
1ex] Sie erweitert stets den Fluss entlang kürzester Pfade.

Edmonds-Karp-Algorithmus

Edmonds-Karp-Algorithmus

Eine Implementierung der Ford-Fulkerson-Methode, die zur Bestimmung augmentierender Pfade eine Breitensuche nutzt. Laufzeit: $O(V \cdot E^2)$.
1ex] Sie erweitert stets den Fluss entlang kürzester Pfade.

Lemma

Im Edmonds-Karp-Algorithmus steigt für alle Knoten $v \in V - \{s, t\}$ der Abstand (d.h. Anzahl der Kanten) des kürzesten Pfades von s nach v im Restnetzwerk G_f monoton mit jeder Flusserweiterung.

Edmonds-Karp-Algorithmus

Edmonds-Karp-Algorithmus

Eine Implementierung der Ford-Fulkerson-Methode, die zur Bestimmung augmentierender Pfade eine Breitensuche nutzt. Laufzeit: $O(V \cdot E^2)$.
1ex] Sie erweitert stets den Fluss entlang kürzester Pfade.

Lemma

Im Edmonds-Karp-Algorithmus steigt für alle Knoten $v \in V - \{s, t\}$ der Abstand (d.h. Anzahl der Kanten) des kürzesten Pfades von s nach v im Restnetzwerk G_f monoton mit jeder Flusserweiterung.

Theorem

Die Gesamtzahl der Flusserweiterungen im Edmonds-Karp-Algorithmus für das Flussnetzwerk $G = (V, E, c)$ ist in $O(V \cdot E)$.