Outline

Beweise

Beweis

Ein *Beweis* ist eine Folge von mathematisch korrekten Schlussfolgerungen, aus denen auf die Gültigkeit der zu beweisenden Aussage geschlossen werden kann.

Abkürzungen

$A \wedge B$	A und B
$A \vee B$	A oder B
$\neg A$	nicht A
$A \Leftrightarrow B$	A gilt genau dann, wenn B gilt
$A \Rightarrow B$	wenn A gilt, dann gilt auch B
$\exists x \in S$	es gibt ein $x \in S$
$\forall x \in S$	für alle $x \in S$

Direkte Beweis

Satz

Sei n eine ungerade natürliche Zahl, dann ist auch n^2 ungerade.

Beweis

n ist ungerade d.h. $\exists k \in \mathbb{N}_0$, sodass $n = 2k + 1$ und es gilt:

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 = (2k)^2 + 4k + 1 \\ &= \underbrace{2 * (2k^2 + 2k)}_{\text{gerade}} + 1 \end{aligned}$$

Beweis durch Widerspruch

Idee

Aussage A gilt, wenn $\neg A$ zu einem Widerspruch führt:

$$\neg\neg A \Leftrightarrow A$$

Satz

$\sqrt{2}$ ist irrational, d.h. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Behauptung

$\sqrt{2}$ ist irrational, d.h. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Beweis.

Annahme: $\sqrt{2}$ is nicht irrational $\Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$
$\Rightarrow$ es gibt teilerfremde Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$, so dass gilt:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2$$

$\Rightarrow$ p^2 ist gerade $\Rightarrow$ p ist gerade

$\Rightarrow$ $\exists k \in \mathbb{N} : p = 2k \Rightarrow p^2 = (2k)^2 = 4k^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$

$\Rightarrow$ q^2 ist gerade $\Rightarrow$ q ist gerade

$\Rightarrow$ p und q haben den gemeinsamen Teiler 2.

$\Rightarrow$ *Widerspruch* zur Annahme, dass p und q teilerfremd sind.

$\Rightarrow$ Die Behauptung ist wahr.

$\square$

Vollständige Induktion

Vollständige Induktion

Eine Beweismethode zum zeigen, dass alle natürlichen Zahlen n eine Eigenschaft $P(n)$ erfüllen.

Vorgehensweise:

1. *Induktionsverankerung* beweisen: Zeige, dass $P(1)$ gilt.
2. *Induktionsschritt* beweisen: Zeige, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:

   Wenn $P(n)$ gilt, dann gilt auch $P(n+1)$.

   Hierzu nutzt man die *Induktionsannahme*, dass $P(n)$ wahr ist und folgert daraus, dass auch $P(n+1)$ wahr ist.

Vollständige Induktion

Kleiner Gauß

Für alle natürlichen Zahlen n gilt: Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist gleich $\frac{1}{2}n(n+1)$.

Beweis.

1. Induktionsverankerung

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1}{2}n(n+1)$$

2. Induktionsschritt

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = n+1+\sum_{i=1}^{n} i = n+1+\frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

$\square$