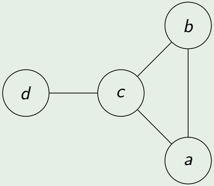
Outline

Graphen

Graph



Ein Graph besteht aus:

Knoten - dargestellt durch Kreise.
Kanten - Verbindungen zwischen den Knoten.

Graph $G = (V, E)$ mit:

$$V = \{a, b, c, d\}$$

$$E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}$$

Formale Beschreibung

Ein Graph G ist ein *Tupel* (V, E) mit:

V (endliche) nichtleere Menge von Knoten
E $\subseteq \{\{x, y\} \mid x, y \in V \wedge x \neq y\}$, Menge der Kanten

Nachbarschaft

Nachbarschaft

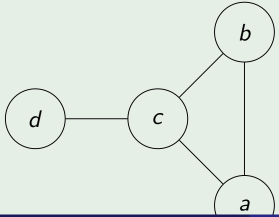
Für $G = (V, E)$ und $v \in V$ definieren wir die Nachbarschaft $\Gamma(v)$:

$$\Gamma(v) := \{u \in V \mid \{v, u\} \in E\}.$$

Der Grad von v bezeichnet die Größe der Nachbarschaft von v:

$$deg(v) := |\Gamma(v)|.$$

Beispiel



- $\Gamma(a) = \{b, c\}$
- $\Gamma(b) = \{a, c\}$
- $\Gamma(c) = \{a, b, d\}$
- $\Gamma(d) = \{c\}$

- $\deg(a) = 2$
- $\deg(b) = 2$
- $\deg(c) = 3$
- $\deg(d) = 1$

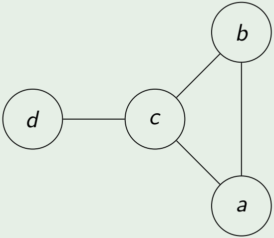
Nachbarschaft

Bezeichnungen

Für Graph $G = (V, E)$, $u, v \in V$ und $e \in E$ gilt:

- u und v heißen *adjazent*, wenn $\{u, v\} \in E$
- u und v heißen *Endknoten* der Kante $\{u, v\}$.
- u und e heißen *inzident*, wenn u einer Endknoten von e ist.

Beispiel



- c und d sind adjazent.
- a und d sind nicht adjazent.
- a und b sind Endknoten der Kante $\{a, b\}$.
- c und $\{a, c\}$ sind inzident.

Nachbarschaft

Satz:

Für jeden Graphen $G = (V, E)$ gilt

$$\sum_{u \in V} deg(v) = 2|E|.$$

Beweis.

Beweis durch doppeltes Abzählen.

$\sum_{u \in V} deg(v)$:
Jede Kante $e = \{u, v\}$ erhöht die Werte $deg(u)$ und $deg(v)$ und wird somit zweimal gezählt.

$2|E|$:
Jede Kante wird ebenfalls zweimal gezählt. $\square$

Wege und Pfade

Weg

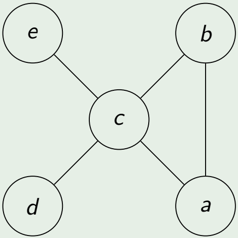
Für $G = (V, E)$ nennen wir die Folge $W = (v_0, \ldots, v_l)$ mit $v_i \in V$
Weg W der Länge l, falls gilt:

$$\{v_i, v_{i+1}\} \in E, \ \forall i = 0, \ldots, l-1.$$

Pfad

Ein *Pfad* in G ist ein Weg in G, in dem alle Knoten paarweise verschieden sind.

Beispiel



	Weg	Pfad
$(d\ b\ a\ c)$	–	–
$(b\ c\ b\ a\ c\ e)$	✓	–
$(e\ c\ b\ a)$	✓	✓
$(c\ a\ b)$	✓	✓

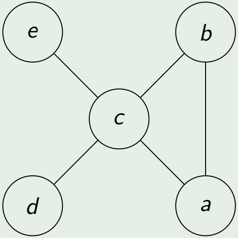
Kreise

Kreis

Für $G = (V, E)$ nennen wir die Folge $C = (v_1, \ldots, v_l)$ mit $l \geq 3$ und $v_i \in V$ *Kreis* der Länge l, falls gilt:

$$\begin{array}{lll} & v_i \neq v_j & \forall i, j = 1, \ldots l,\ i \neq j \\ \wedge & \{v_i, v_{i+1}\} \in E & \forall i = 1, \ldots l - 1 \\ \wedge & \{v_1, v_l\} \in E & \end{array}$$

Beispiel



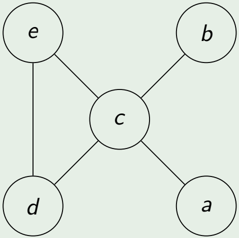
	Weg	Pfad	Kreis
$(d\ b\ a\ c)$	–	–	–
$(b\ c\ b\ a\ c\ e)$	✓	–	–
$(e\ c\ b\ a)$	✓	✓	–
$(c\ a\ b)$	✓	✓	✓
$(d\ c)$	✓	✓	–

Hamiltonkreis

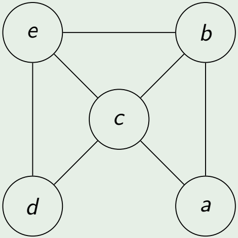
Hamiltonkreis

Ein *Hamiltonkreis* in einem Graphen ist ein Kreis der alle Knoten umfasst.

Beispiel



Hat keinen Hamiltonkreis.



(a c d e b) ist ein Hamiltonkreis.

Hamiltonkreis

Satz (Ore)

Erfüllt ein Graph $G = (V, E)$ die Bedingung:

$$deg(x) + deg(y) \geq |V| \text{ für alle } x, y \in V \text{ mit } x \neq y \text{ und } \{x, y\} \notin E,$$

so enthält er einen Hamiltonkreis.

Beweis

Beweis durch Widerspruch.

Eulertour

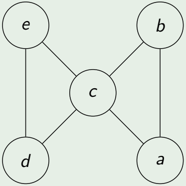
Eulertour

Eine *Eulertour* in einem Graphen ist ein Weg, der jede Kante des Graphen genau einmal enthält und dessen Anfangs- und Endknoten identisch sind.

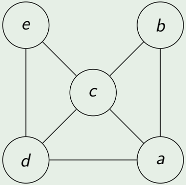
Enthält ein Graph eine Eulertour, so nennt man ihn eulersch.

Satz (Euler)

Ein *zusammenhängender* Graph $G = (V, E)$ ist genau dann eulersch, wenn der Grad aller Knoten gerade ist.



(a b c d e c a) ist eine Eulertour



Ist nicht eulersch