Outline

Lineares Gleichungssystem

Lineares Gleichungssystem I

Ein lineares Gleichungssystem (über $\mathbb{R}$), kurz LGS, hat die Form

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Alternative Schreibweise

Wir können ein LGS auch als Matrix Produkt aufschreiben:

$$A \cdot x = b$$

hierbei ist $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ die Koeffizienten Matrix, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ der Lösungsvektor und $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^t$.

Lineares Gleichungssystem II

Alternative Schreibweise

Wir können ein LGS auch als Matrix Produkt aufschreiben:

$$A \cdot x = b$$

- $a_{ij}, b \in \mathbb{R}$ sind die Koeffizienten des LGS
- Das LGS hat m Gleichungen und n Unbekannte $(x_1, \ldots, x_n)$
- Eine *Lösung* des LGS ist ein Vektor $(x_1. \ldots, x_n)$, sodass $A \cdot x = b$ erfüllt ist.
- $\mathbb{L}$ bezeichnet die Menge aller Lösungen.
- Ist $b = 0$ so heißt das LGS *homogen*, sonst *inhomogen*.

Beispiele für LGS

$$\begin{array}{ccccc} x & + & y & = 2 \\ x & - & y & = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} x & + & y & = 2 \\ x & + & y & = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} x & + & y & = 2 \\ 3x & + & 3y & = 6 \end{array}$$

$$\mathbb{L} = \{(1,1)\} \qquad \mathbb{L} = \emptyset \qquad \mathbb{L} = \{(x, 2-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

Äquivalenzumformungen

Die Lösungsmenge eines LGS ändert sich nicht, wenn

1. zwei Gleichungen vertauscht werden
2. eine Gleichung mit einem $c \neq 0$ ($c \in \mathbb{R}$), multipliziert wird
3. das c-fache ($c \in \mathbb{R}$) einer Gleichung zu einer anderen addiert wird.

diese Umformungen heißen Äquivalenzumformungen.

Zeilenstufenform

Zeilenstufenform

Sei $A \in K^{m \times n}$ und z_i die i-te Zeile von A. Wir definieren k_i als die erste Position in z_i mit $a_{ik_i} \neq 0$ oder $n+1$, falls es sich um eine Null-Zeile handelt.
H hat Zeilenstufenform, wenn gilt: $k_1 < k_2 < \cdots < k_m = n+1$

Es ergibt sich das folgende Bild:

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & \blacksquare & \star & \star & \star & \dots & \star & \star & \star & \star \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & \star & \dots & \star & \star & \star & \star \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & \dots & \star & \star & \star & \star \\
 & & \vdots & & & & & \ddots & & & \vdots & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \blacksquare & \star & \star & \star \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \dots & & & & & & & & & &
\end{pmatrix}$$

$\star$ ist ein beliebiger Eintrag, während $\blacksquare$ ein Wert ungleich 0 ist.
Bemerkung:

- Null-Zeilen dürfen nur am Ende der Matrix stehen

Gauß-Algorithmus

Satz

Jede Matrix $A \in K^{m \times n}$ kann durch eine Folge elementarer Zeilentransformationen (tauschen und addieren) auf Zeilenstufenform gebracht werden.

Algorithmus (Gauß)

Es sei $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ Für $1 \leq j \leq n$ sei s_j die j-te Spalte von A. Wir überführen A wie folgt in Zeilenstufenform:

1. Ist A die Nullmatrix oder eine 1-Matrix so sind wir fertig.
2. $k := min\{j \mid 1 \leq j \leq n, s_j \neq 0\}$.
3. Wähle i mit $a_{ik} \neq 0$ und tausche Zeile 1 und i.
4. Für jedes $1 < i \leq m$ addiere das $(-\frac{a_{ik}}{a_{1k}})$-fache der Zeile 1 zur Zeile i.
5. Weiter ab Schritt 1 für den Block $(a_{ij})_{\substack{2 \leq i \leq m \\ k < j \leq n}}$.

Homogene LGS

Lösen homogener LGS

Gegeben sei ein homogenes LGS $A \cdot x = 0$.

1. Transformiere A in Zeilenstufenform (Gauß-Algorithmus)
2. Die Spalten $k_1, \ldots, k_r$ bestimmen die abhängigen Unbekannten, die anderen werden freie Unbekannte genannt.
3. Ersetze die freien Unbekannten durch Parameter $t_1, \ldots, t_{n-r}$.
4. Löse von unten nach oben nach den abhängigen Unbekannten auf.

- Ein homogenes LGS hat immer die triviale Lösung $0 = K^n$.
- Hat das LGS weniger Gleichungen als Unbekannte so gibt es nicht-triviale Lösungen.

Inhomogene LGS

Lösen inhomogener LGS

Gegeben sei ein inhomogenes LGS $A \cdot x = b$, wir betrachten die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A, b) \in K^{m \times (n+1)}$.

1. Transformiere (A, b) in Zeilenstufenform (Gauß-Algorithmus)
2. Lösbarkeit entscheidet sich am Index k_r:
   - Ist $r > 0$ und $k_r = n + 1$, so ist das LGS unlösbar.
   - Ist $r = 0$ oder $k_r \leq n$ so ist das LGS lösbar.
3. Bestimme $\mathbb{L}(A)$ (homogenen LGS)
4. Bestimme ein beliebige Lösung $s \in (L)(A, b)$, z.B. setze alle freien Unbekannten gleich 0.
5. Die Lösungsmenge ist:

$$L(A, b) = \{s + u \mid u \in \mathbb{L}(A)\} = s + L(A)$$

Bestimmung der Determinante

Berechnung der Determinante

Für Determinanten gelten die folgenden Regeln:

- Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist das Produkt der Diagonalen.
- Falls sich B durch Zielen vertauschen aus A ergibt, so ist $det\, B = -det\, A$.
- Ergibt sich B aus A indem man ein vielfaches einer Zeile zu einer anderen addiert, so gilt $det\, B = det\, A$.
- Ergibt sich B aus A, indem man eine Zeile mit c multipliziert, so ist $det\, B = c \cdot det\, A$.

Mit Hilfe dieser Regeln und dem Gauß-Algorithmus können wir die Determinante einer Matrix bestimmen.

Beispiel

$$det \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = 5$$