Outline

Matrizen

Matrix

Eine $(m \times n)$-Matrix A ist ein rechteckiges Feld von $m \cdot n$ Zahlen:

$$A = (a_{ij}) := \begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & a_{1\,3} & \dots & a_{1\,n-1} & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & a_{2\,3} & \dots & a_{2\,n-1} & a_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1\,1} & a_{m-1\,2} & a_{m-1\,3} & \dots & a_{m-1\,n-1} & a_{m-1\,n} \\ a_{m\,1} & a_{m\,2} & a_{m\,3} & \dots & a_{m\,n-1} & a_{m\,n} \end{pmatrix}$$

- a_{ij} heißt *Koeffizient* oder *Eintrag* von A.
- $K^{m \times n}$ ist die Menge aller $(m \times n)$-Matrizen mit Einträgen aus K.
- $\begin{pmatrix} a_{i\,1} & a_{i\,2} & a_{i\,3} & \dots & a_{i\,n-1} & a_{i\,n} \end{pmatrix} \in K^{1 \times n}$ heißt die i-te *Zeile* von A.
- Entsprechend sprechen wir auch von Spalten von A.
- Wir betrachten $K = \mathbb{R}$, aber auch andere Zahlenräume sind möglich.

Transponierte

Transponierte

Sei $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$.

$$A^t := (a^t_{ij}) \in K^{n \times m} \; mit \; a^t_{ij} = a_{ji}, \quad \forall 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

heißt Transponierte von A.

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 12 & 3 & 4 & 8 \\ 17 & 13 & 9 & 10 \\ 2 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 12 & 17 & 2 \\ 3 & 13 & 7 \\ 4 & 9 & 5 \\ 8 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

Symmetrische Matrix

Eine Matrix A heisst symmetrisch wenn $A^t = A$ gilt.

Skalares Vielfach

Skalares Vielfach

Sei $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ und $r \in K$.

$$r \cdot A := (r \cdot a_{ij}) \in K^{m \times n}$$

heißt *skalares Vielfaches* von A

Beispiel

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 8 & 9 & 10 \\ 12 & 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 12 \\ 24 & 27 & 30 \\ 36 & 21 & 15 \end{pmatrix}$$

$$-3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 8 & 9 & 10 \\ 12 & 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -9 & -12 \\ -24 & -27 & -30 \\ -36 & -21 & -15 \end{pmatrix}$$

Summe

Summe

Sei $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ und $B = (b_{ij}) \in K^{m \times n}$.

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij}) \in K^{m \times n}$$

ist die *Summe* von A und B.

Differenz: $A - B = A + (-1 \cdot B)$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} + (-1 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Multiplikation

Produkt

Sei $A = (a_{ij}) \in K^{m \times l}$ und $B = (b_{ij}) \in K^{l \times n}$.

$$A \cdot B := (c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik} b_{kj}) \in K^{m \times n}$$

ist das *Produkt* von A und B.

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+15 & 3+21 \\ 32+45 & 24+63 \\ 20+35 & 15+49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 24 \\ 77 & 87 \\ 55 & 64 \end{pmatrix}$$

Vektoren

Vektor

Ein n-Vektor ist ein eindimensionales Feld von Zahlen. Meist stellen wir ihn als Spaltenvektor da, d.h. als $n \times 1$- Matrix. Der entsprechenden Zeilenvektor ist die transponierte Matrix.

Einheitsvektor

Der *Einheitsvektor* e_i, ist der Vektor dessen i-tes Element den Wert 1 hat, während alle anderen Elemente den Wert 0 haben.

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}^t \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3$$

Quadratische Matrizen

Quadratische Matrix

Eine $n \times n$- Matrix heißt quadratisch.

Nullmatrix

Eine Matrix deren Einträge alle den Wert 0 haben heißt Nullmatrix.

Die Nullmatrix ist das neutrale Element bezüglich der Addition.

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$$

Einheitsmatrix

Die $n \times n$ Matrix $E_n = (e_{ij})$ mit:

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & \mathit{falls}\ i = j \\ 0 & \mathit{falls}\ i \neq j \end{cases}$$

heiss Einheitsmatrix.

Die Einheitsmatrix ist das neutrale Element bezüglich der Multiplikation.

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in K^{3\times 3}$$

Spezielle, quadratische Matrizen

Permutationsmatrix

Eine Permutationsmatrix entsteht durch das umsortieren der Zeilen einer Einheitsmatrix. D.h. in jeder Zeile und in jeder Spalte der Matrix befindet sich exakt ein Eintrag mit dem Wert 1. Alle anderen Einträge haben den Wert 0.

Untere- und Obere Dreiecksmatrix

Eine $n \times n$ Matrix $C = (c_{ij})$ heiss *Untere (Obere) Dreiecksmatrix*, wenn $c_{ij} = 0$, für alle Einträge mit $j > i$ ($i > j$).

Beispiel

Permutationsmatrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Untere Dreiecksmatrix:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 10 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 5 & 0 \\ 5 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

Obere Dreiecksmatrix:

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Matrixinverse

Matrixinverse einer quadratisch Matrix

Die *Inverse* einer $n \times n$ Matrix A (falls sie existiert) ist die $n \times n$ Matrix A^{-1}, für die gilt:

$$A \cdot A^{-1} = E_n = A^{-1} \cdot A$$

Beispiele

Inverse:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Matrix ohne Inverse:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Eine Matrix die keine *Inverse* hat, wird als *nicht invertierbar* oder *singulär* bezeichnet, sonst als *invertierbar* oder *regulär*.
- Besitzt eine Matrix eine 0-Spalte oder 0-Zeile so ist sie singulär.

Determinante

Determinante

Die Determinante ist ein Skalar, der einer quadratischen Matrix zuordnet wird. Einige Eigenschaften einer Matrize lassen sich über ihre Determinante bestimmen.

Determinanten kleiner Matrizen

Für $A \in K^{1\times 1}$: $det\, A = det(a_{11}) = a_{11}$

Für $A \in K^{2\times 2}$: $det\, A = det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Für $A \in K^{3\times 3}$: $det\, A = det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

- Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist das Produkt der Diagonalen.
- Eine Matrix ist genau dann singulär, wenn ihre Determinante den Wert 0 hat.