Outline

Relationen

Relation

Eine (binäre) Relation $\mathcal{R}$ zwischen zwei Mengen A und B ist eine Teilmenge

$$\mathcal{R} \subseteq A \times B$$

Relation auf der Menge A:

$$\mathcal{R} \subseteq A \times A$$

Beispiel

Kleiner-Relation:

$$\mathcal{R} := \{(m, n) \mid m, n \in \mathbb{N} \text{ mit } n = m + k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}\}$$

Teilbarkeit-Relation:

$$\mathcal{R} := \{(m, n) \mid m, n \in \mathbb{N} \text{ mit } n = m * k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}\}$$

Relationen

Eigenschaften von Relationen

Eine Relation $\mathcal{R}$ auf der Menge A heißt

- *reflexiv*, wenn für alle $a \in A$ gilt: $(a, a) \in \mathcal{R}$
- *symmetrisch*, wenn für alle $a, b \in A$ gilt: $(a, b) \in \mathcal{R} \Rightarrow (b, a) \in \mathcal{R}$
- *antisymmetrisch*, wenn für alle $a, b \in A$ gilt: $(a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, a) \in \mathcal{R} \Rightarrow a = b$
- *transitiv*, wenn für alle $a, b, c \in A$ gilt: $(a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, c) \in \mathcal{R} \Rightarrow (a, c) \in \mathcal{R}$

Beispiel

$$R = \{(M, N) \mid M \subseteq N\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

- reflexiv ✓
- symmetrisch –
- antisymmetrisch ✓
- transitiv ✓

Spezielle Relationen

Bezeichnungen für spezielle Relationen

Quasiordnung	transitiv, reflexiv
partielle Ordnung	transitiv, reflexiv, antisymmetrisch
Äquivalenzrelation	transitiv, reflexiv, symmetrisch

Beispiel

$$R = \{(M, N) \mid M \subseteq N\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

- reflexiv ✓
- symmetrisch –
- antisymmetrisch ✓
- transitiv ✓

$\Rightarrow$ R ist eine partielle Ordnung.

Abbildungen

Abbildung

Eine Relation $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ ist eine Abbildung (oder Funktion), wenn gilt:

$$\text{Für alle } a \in A: \ |\{b \in B \mid (a,b) \in \mathcal{R}\}| = 1.$$

Beispiel

Sei $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$

- $\{(a,1), (b,2), (c,3), (d,4)\} \subseteq A \times B$ ✓
- $\{(a,1), (b,1), (c,1), (d,1)\} \subseteq A \times B$ ✓
- $\{(a,1), (a,2), (a,3), (a,4)\} \subseteq A \times B$ –

- $\{(a, 2a) \mid a \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ✓
- $\{(2a, a) \mid a \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ –

Funktion

Die Funktion f kann durch Regeln beschrieben werden, die für ein Element $a \in A$ das Bild $f(a)$ festlegen:

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ a &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

Beispiel

Die Relation $\mathcal{R} = \{(a, 2a) \mid a \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ wird beschrieben durch die Funktion:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto 2n$$

Urbild

Das Urbild $f^{-1}(b)$ eines Elements $b \in B$ ist definiert als

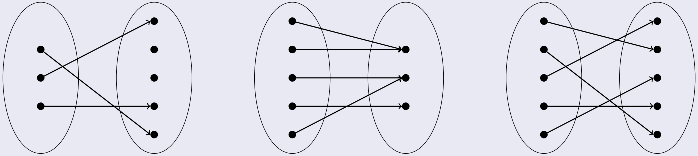
$$f^{-1}(b) := \{a \in A \mid f(a) = b\}.$$

Bezeichnungen

Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt:

- *injektiv*, wenn für alle $b \in B$ gilt: $|f^{-1}(b)| \leq 1$.
- *surjektiv*, wenn für alle $b \in B$ gilt: $|f^{-1}(b)| \geq 1$.
- *bijektiv*, wenn für alle $b \in B$ gilt: $|f^{-1}(b)| = 1$.

d.h. eine Abbildung ist bijektiv, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.



injektive Abbildung surjektive Abbildung bijektive Abbildung

Endliche Mengen

Abbildungen auf endlichen Mengen

Sind A und B endliche Mengen, so kann die Funktion $f : A \to B$ offenbar nur dann bijektiv sein, wenn $|A| = |B|$ ist. In diesem Fall gilt sogar:

$$f \text{ bijektiv} \iff f \text{ injektiv} \iff f \text{ surjektiv.}$$

Isomorph

Isomorph

Relationen $\mathcal{R}$ auf A und $\mathcal{R}$' auf A' heißen *isomorph*, falls es eine bijektive Abbildung $f : A \to A'$ gibt, sodass für alle $a, b \in A$ gilt:

$$(a, b) \in \mathcal{R} \Longleftrightarrow (f(a), f(b)) \in \mathcal{R}'$$

Beispiel

Ist $A = \{1, 2, 3\}$ und $A' = \{x, y, z\}$, so sind die Relationen $\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 3)\}$ und $\mathcal{R}' = \{(x, y), (y, z)\}$ isomorph.

Die bijektive Abbildung f ist wie folgt definiert:
$f : A \to A'$ mit $f(1) = x$, $f(2) = y$, $f(3) = z$.

Permutation

Permutation

Eine *Permutation* einer Menge $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ ist eine bijektive Abbildung $\pi : A \rightarrow A$

$$\pi = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ \pi(a_1) & \pi(a_2) & \ldots & \pi(a_n) \end{pmatrix}.$$

Beispiel

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 5 & 8 & 3 & 6 & 2 & 7 & 4 & 1 & 9 & 11 & 10 \end{pmatrix}.$$

Permutation

Beispiel

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 5 & 8 & 3 & 6 & 2 & 7 & 4 & 1 & 9 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

Fixpunkt

Fixpunkte von π: 3 und 9,
d.h. es gilt $\pi(3) = 3$ und $\pi(9) = 9$.

Zyklus

(1 5 2 8) ist ein *Zyklus* auf π d.h.:

$$\pi(1) = 5,\ \pi(\pi(1)) = 2,\ \pi(\pi(\pi(1))) = 8 \text{ und } \pi(\pi(\pi(\pi(1)))) = 1$$

$(1\ 5\ 2\ 8), (3)$ und (9) sind weitere Zyklen von π.

Zyklendarstellung

Beispiel

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 5 & 8 & 3 & 6 & 2 & 7 & 4 & 1 & 9 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

Zyklendarstellung

Jede Permutation kann als Produkt von Zyklen geschrieben werden, zum Beispiel gilt für die Permutation π:

$$\pi = (1\ 5\ 2\ 8)(3)(4\ 6\ 7)(9)(10\ 11)$$